Vaja 4: **Prostorska transformacija**

Pri vaji 3-1 imate podane geodetske koordinate (φ, λ, h) astrogeodetske točke na elipsoidu GRS80. Izračunajte:

1. Pravokotne kartezične koordinate točke x, y in z (vaja 2.3),
2. Transformirane koordinate točke x_T, y_T, z_T, kjer uporabite 7-parametrično prostorsko transformacijo in so parametri enaki:
   - premiki: $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 281.529 & 45.963 & 537.515 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ m,
   - zasuki: $\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2.570\,437'' & -9.648\,271'' & 10.759\,507'' \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,
   - sprememba merila: $\Delta m = 26.465548$ ppm.
3. Transformirane koordinate točke x_T, y_T, z_T, kjer uporabite približno končno rotacijsko matriko $\overline{\mathbf{R}}_{xyz}$.

Analitično in numerično določite:

- končno celo rotacijsko matriko $\mathbf{R}_{xyz}$ in
- približno končno celo rotacijsko matriko $\overline{\mathbf{R}}_{xyz}$, če predpostavite male vrednosti zasukov.

Analitično in numerično se prepričajte da:

- na izračunane transformirane koordinate vpliva vrstni red množenja rotacijskih matrik in
- so vse rotacijske matrike ortogonalne.

Analitično prikažite, kako se izračuna obratne transformacijske parametre.

Prostorska podobnostna 7-parametrična transformacija je določena z:

$$\mathbf{x}_T = \mathbf{T} + m\mathbf{R}_{xyz}\mathbf{x} \tag{1}$$

V enačbi 1 so količine določene z:

- $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – koordinate točke v začetnem koordinatnem sistemu,
- $\mathbf{x}_T = \begin{bmatrix} x_T & y_T & z_T \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – transformirane koordinate točke v končnem koordinatnem sistemu,
- $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – vektor premika, ki izvede premike po vseh treh koordinatnih oseh,
- m – parameter merila ob prehodu iz enega v drugi koordinatni sistem $m = 1 + \Delta m$,
- $\mathbf{R}_{xyz}$ – rotacijska matrika, ki izvede zasuke okoli vseh treh koordinatnih osi in ima obliko:
$$\mathbf{R}_{xyz} = \mathbf{R}_x(\omega_x)\mathbf{R}_y(\omega_y)\mathbf{R}_z(\omega_z) \tag{2}$$
- $\mathbf{R}_x(\omega_x)$ – rotacijska matrika, ki izvede zasuk okoli x osi za kot ω_x:
$$\mathbf{R}_x(\omega_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_x) & -\sin(\omega_x) \\ 0 & \sin(\omega_x) & \cos(\omega_x) \end{bmatrix} \tag{3}$$
- $\mathbf{R}_y(\omega_y)$ – rotacijska matrika, ki izvede zasuk okoli y osi za kot ω_y:
$$\mathbf{R}_y(\omega_y) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_y) & 0 & \sin(\omega_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\omega_y) & 0 & \cos(\omega_y) \end{bmatrix} \tag{4}$$
- $\mathbf{R}_z(\omega_z)$ – rotacijska matrika, ki izvede zasuk okoli z osi za kot ω_z:
$$\mathbf{R}_z(\omega_z) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_z) & -\sin(\omega_z) & 0 \\ \sin(\omega_z) & \cos(\omega_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Približno rotacijsko matriko $\overline{\mathbf{R}}_i(\alpha)$ nastavimo ko velja $\alpha \to 0$, torej ko je α "majhen" kot zasuka. V tem primeru velja (na osnovi razvoja v Taylorjevo vrsto):

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \qquad \cos(\alpha) \approx 1$$

Če sta dva kota zasuka α in β majhna, potem tudi velja:

$$\alpha^2 \approx 0 \qquad \beta^2 \approx 0 \qquad \alpha\beta \approx 0$$