Vaja 3 - 1: **Dolžina loka meridiana**

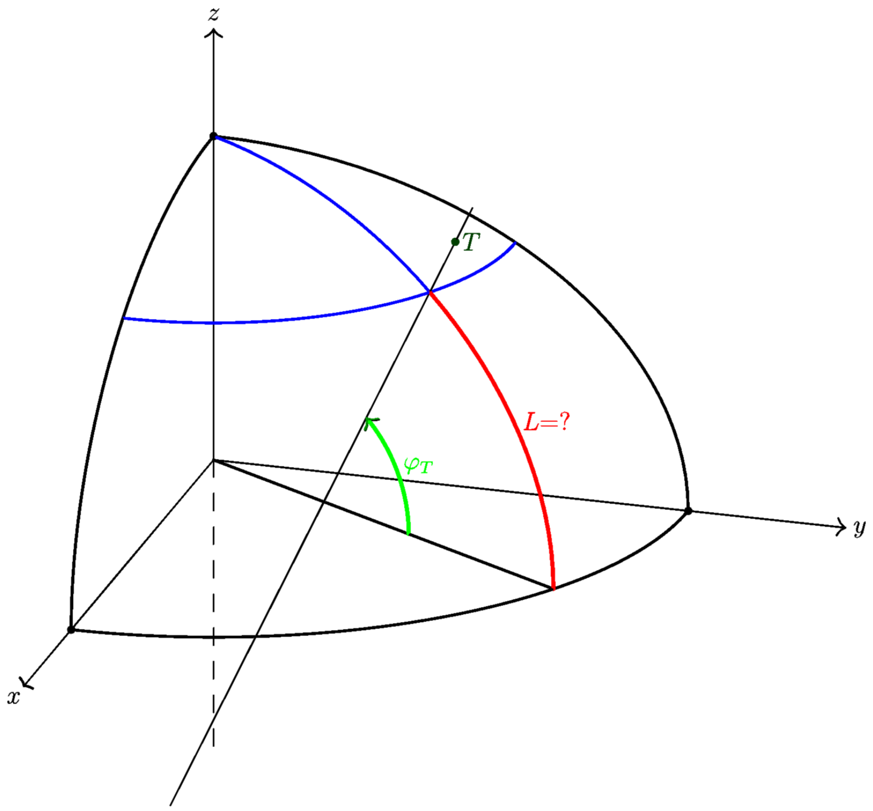
Podan imate položaj geodetske točke Astrogeodetske mreže na območju Slovenije na elipsoidu GRS80:

KRMJ: $\lambda = 13°35'32.737\,80''$ $\quad \varphi = 45°49'24.129\,90''$ $\quad h = 282.0372\,\mathrm{m}$

Za podano točko izračunajte dolžino loka meridiana od ekvatorja do točke na različne načine, in sicer:

1. z uporabo matlabove funkcije za numerično integriranje `quad`,
2. s postopki numerične integracije:
   - obrazec pravokotnikov,
   - obrazec trapezov in
   - obrazec parabol (Simpsonov obrazec)
3. z razvojem v binomsko vrsto.

POMOČ:



Slika 1: Prikaz geodetske točke na elipsoidu in dolžina loka meridiana L

Dolžina loka meridiana predstavlja izračun eliptičnega integrala 2. vrste, oblike:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi, a, e) d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}^3} d\varphi \tag{1}$$

Ker je integral v enačbi 1 analitično nerešljiv, ga rešujemo z numeričnimi postopki. Primeri numeričnega integriranja so:

- Obrazec pravokotnikov:

$$L = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(y_0 + y_1 + y_2 + +y_3 + \cdots + y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + y_n\right) \tag{2}$$

- Obrazec trapezov:

$$L = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-3} + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n\right) \tag{3}$$

- Obrazec parabol (Simpsonov obrazec)[1]:

$$L = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \cdots + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right) \tag{4}$$

[1] Pri Simpsonovi formuli mora biti n sodo število

Postopek računanja integrala z razvojem v binomsko vrsto je podan z:

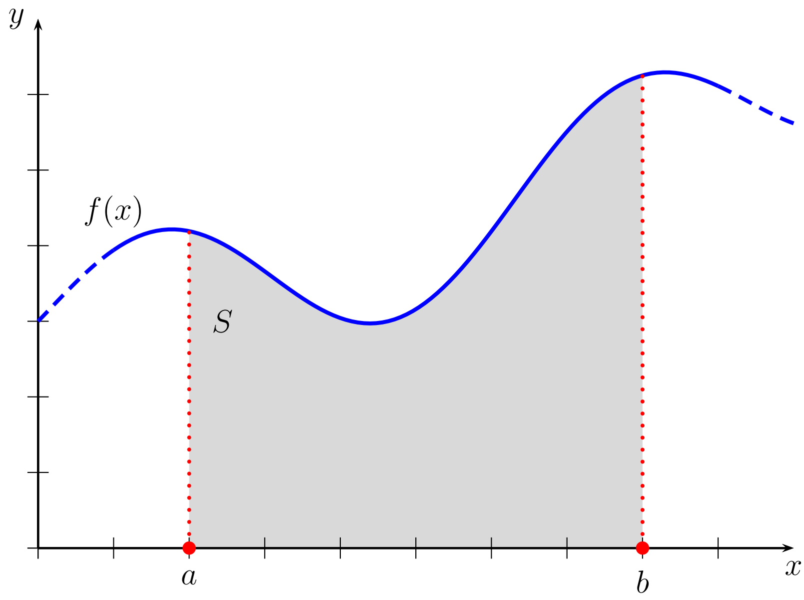
$$L = a(1-e^2)\left[A\varphi - \frac{B}{2}\sin(2\varphi) + \frac{C}{4}\sin(4\varphi) - \frac{D}{6}\sin(6\varphi) + \frac{E}{8}\sin(8\varphi)\right] \tag{5}$$

Koeficienti iz enačbe 5 so dobljeni z:

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \ldots \\
B &= \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \ldots \\
C &= \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \ldots \\
D &= \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \ldots \\
E &= \frac{315}{16384}e^8 + \ldots
\end{aligned}$$

Numerična integracija - grafični prikaz

Določiti želimo površino S območja, ki ga omejuje neka funkcija $f(x)$ na intervalu (a, b) in abscisa. Slika 2 prikazuje situacijo, iskana povšina je obarvana sivo.

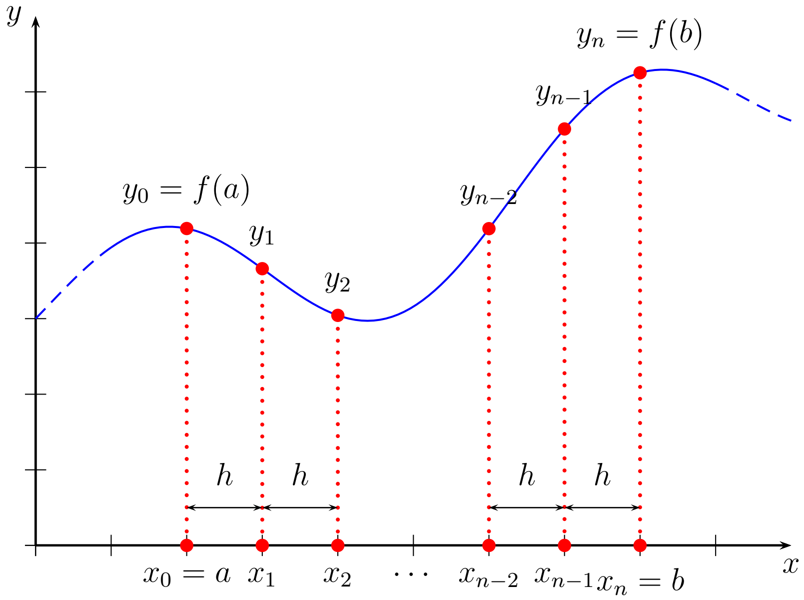


Slika 2: Površina območja, omejenega s funkcijo in absciso na intervalu (a, b)

Površino izračunamo z določenim integralom:

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{6}$$

Problem se pojavi, ko funkcija, ki jo integriramo v enačbi 6, ni integrabilna. V tem primeru nam preostanejo samo še numerične metode integriranja. Vsi postopki numeričnega integriranja imajo enak postopek. V prvem koraku funkcijo, ki jo želimo integrirati, nadomestimo z neko drugo funkcijo, ki je bolj enostavne oblike in je integrabilna. V drugem koraku jo integriramo oziroma določimo povšino pod nadomestno funkcijo, kar nam predstavlja končen rezultat.



Slika 3: Razdelitev intervala (a, b) in izračun vrednosti y_i, $i \in \{0, \ldots, n\}$

Prvo razdelimo interval (a, b) na n enakih delov, širine h, kot prikazuje slika 3. S tem dobimo točke na abscisi, ki imajo vrednosti koordinat x enake:

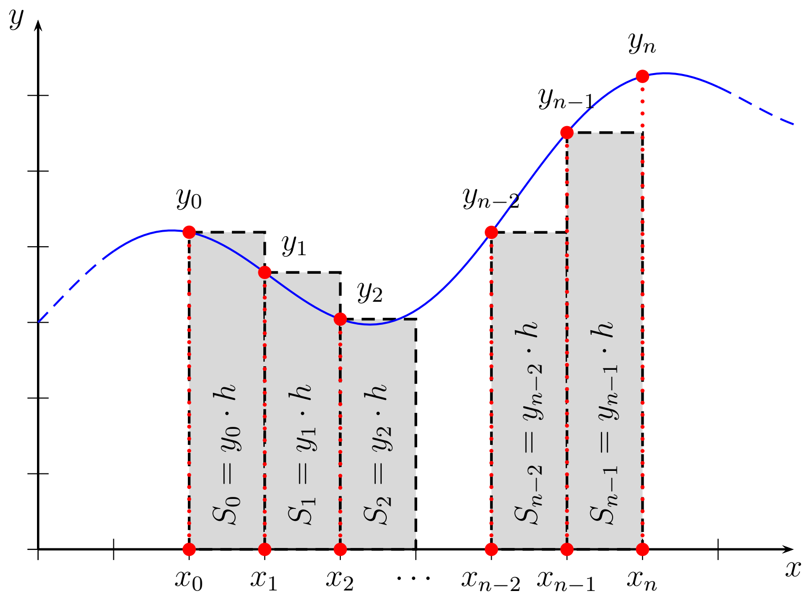
$$x_0 = a \qquad x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \qquad \cdots \qquad x_{n-2} \qquad x_{n-1} \qquad x_n = b$$

Za vsako točko izračunamo vrednost funkcije, in dobimo:

$$y_0 = f(a) \qquad y_1 \qquad y_2 \qquad y_3 \qquad \cdots \qquad y_{n-2} \qquad y_{n-1} \qquad y_n = f(b)$$

Za izračun ploščine sedaj uporabljamo samo še diskretne točke (x_i, y_i), $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Metoda pravokotnikov



Slika 4: Metoda pravokotnikov - aproksimacija funkcije z nezvezno, kosoma konstantno funkcijo in aproksimacija površine z nizom pravokotnikov

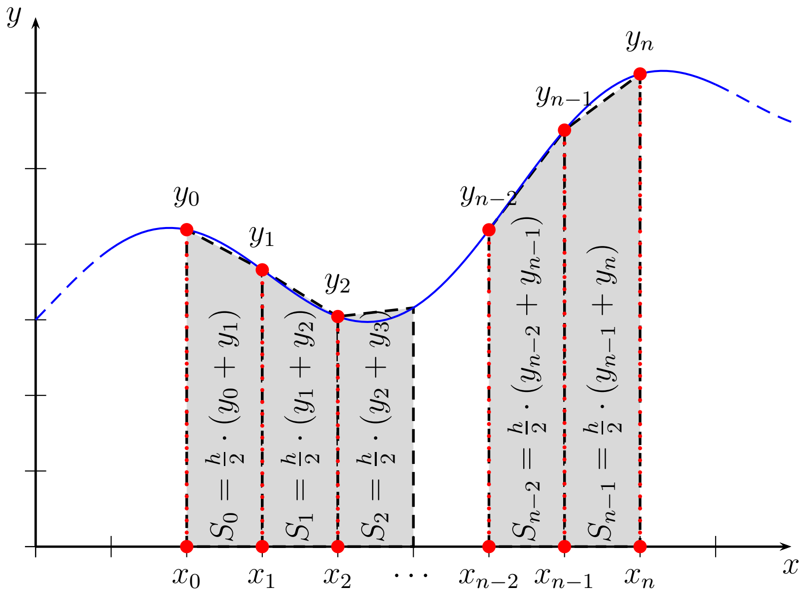
Pri metodi pravokotnikov postopamo kot je prikazano na sliki 4. Funkcijo aproksimiramo z nezvezno, kosoma konstantno funkcijo in površino pod krivuljo nadomestimo s pravokotniki. Pravokotnik površine S_i ima stranici določeni kot h in y_i ($i \in \{0, \ldots, n-1\}$). Če imamo $n+1$ točk na osi x, sestavimo torej n pravokotnikov.
Površino dobimo kot vsoto površin posameznih pravokotnikov:

$$S = \sum_{0}^{n-1} S_i = h \cdot (y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1}) \tag{7}$$

Večjo točnost izračunane površine dobimo tako, da zmanjšamo vrednost h oziroma povečamo število točk na osi x, torej povečamo n.

Metoda trapezov

Iz slike 4 je razvidno, da aproksimacija funkcije s kosoma konstantno funkcijo ni dobra rešitev, saj pravokotniki znatno odstopajo od funkcije. Zato funkcijo nadomestimo z zvezno, kosoma linearno funkcijo, kot je prikazano na sliki 5. V tem primeru z daljicami povežemo zaporedne točke na krivulji in računamo površino kot vsoto trapezov, ki so rezultat skonstruiranih daljic.



Slika 5: Metoda trapezov - aproksimacija funkcije z zvezno, kosoma linearno funkcijo in aproksimacija površine z nizom trapezom

Površino dobimo kot vsoto površin posameznih trapezov:

$$S = \sum_{0}^{n-1} S_i = \frac{h}{2} \cdot ((y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \cdots + (y_{n-2} + y_{n-1}) + (y_{n-1} + y_n)) \tag{8}$$

Če poenostavimo enačbo 8, dobimo končno enačbo za izračun površine pod krivuljo, z metodo trapezov, kot:

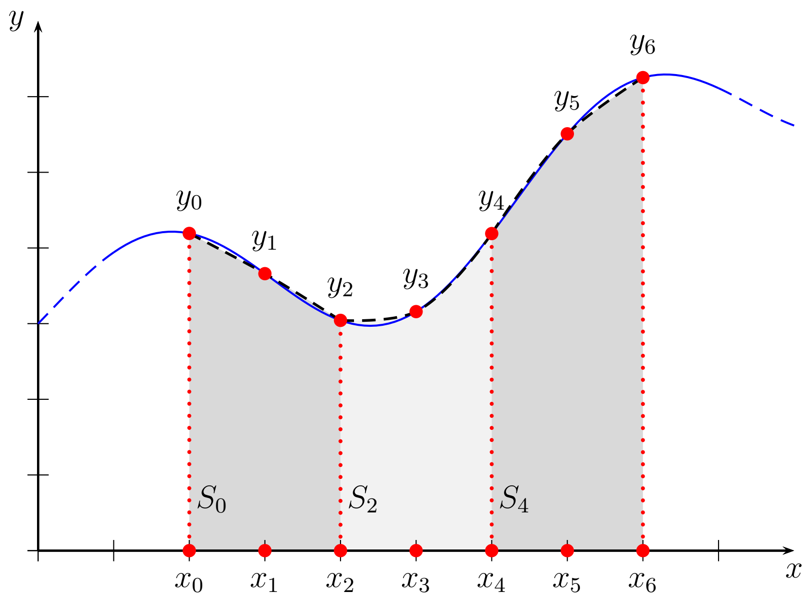
$$S = \sum_{0}^{n-1} S_i = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n) \tag{9}$$

Tudi pri metodi trapezov večjo točnost izračunane površine dobimo tako, da zmanjšamo vrednost h oziroma povečamo število točk na osi x, torej povečamo n.

Simpsonova metoda (metoda parabol)

Pri metodi parabol pa funkcijo nadomestimo z nizi parabol, ki so med seboj povezane v krajiščih. Za enostavnejši prikaz bomo vzeli primer iz slike 6, kjer imamo le 7 točk, (x_i, y_i), $i \in \{0, \ldots, 6\}$. Parabole skonstruiramo na zaporednih nizih treh točk, torej:

1. parabola: točke (x_0, y_0), (x_1, y_1) in (x_2, y_2),
2. parabola: točke (x_2, y_2), (x_3, y_3) in (x_4, y_4) in
3. parabola: točke (x_4, y_4), (x_5, y_5) in (x_6, y_6).



Slika 6: Simpsonova metoda (metoda parabol) - aproksimacija funkcije z zvezno, kosoma parabolično funkcijo in aproksimacija površine s površino pod parabolami

Posamezne površine pod parabolami dobimo preko integracije Lagrangejevega interpolacijskega polinoma[2] in velja:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2) \\ S_2 &= \frac{h}{3} \cdot (y_2 + 4y_3 + y_4) \\ S_4 &= \frac{h}{3} \cdot (y_4 + 4y_5 + y_6) \end{aligned} \tag{10}$$

Končno enačbo za zgornji primer (slika 6) dobimo iz enačb 11 kot:

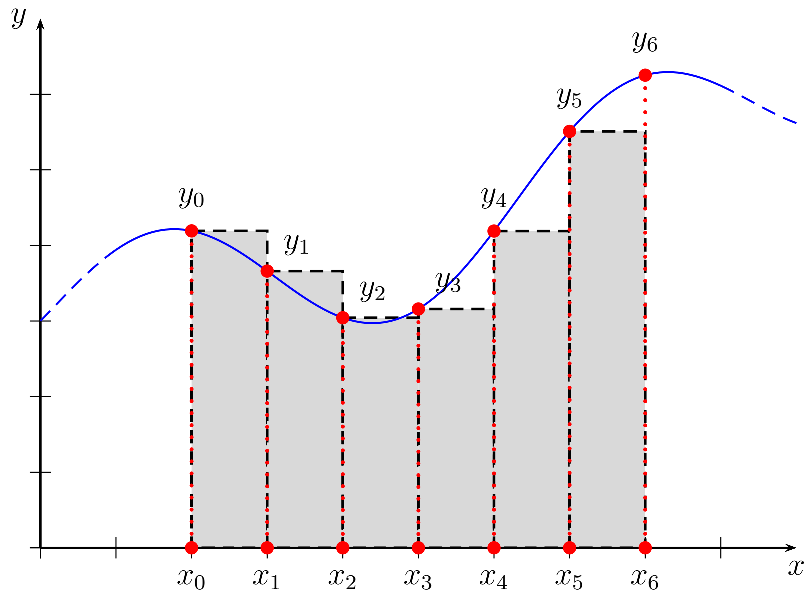
$$S = S_0 + S_2 + S_4 = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) \tag{11}$$

Tudi v primeru metode parabol večjo točnost izračunane površine dobimo tako, da zmanjšamo vrednost h oziroma povečamo število točk na osi x, torej povečamo n.

[2]Glej npr. `https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial`

Metoda pravokotnikov - interval (a, b) razdelimo na 6 delov

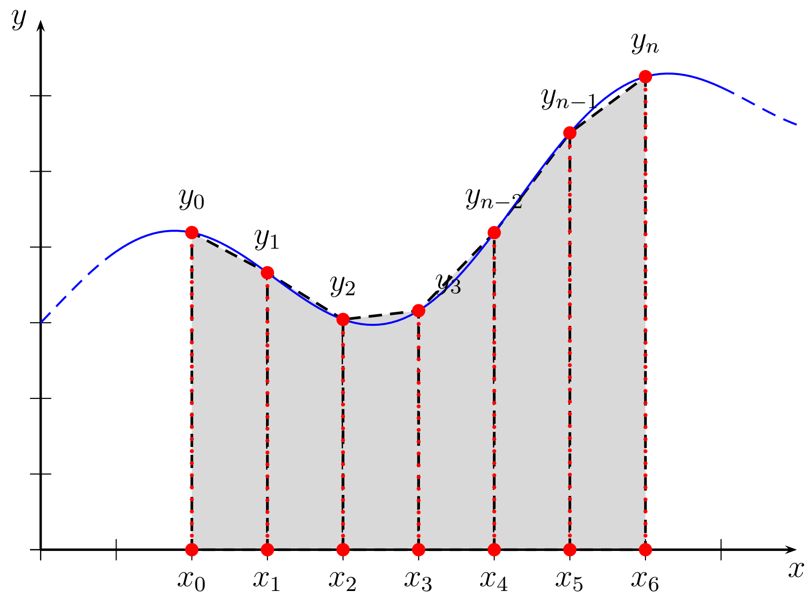
Prikažimo še metodo pravokotnikov, ko interval (a, b) razdelimo na 6 enakih delov, kot prikazuje slika 7. Iz slike je razvidno, kako aproksimirano površino pod krivuljo.



Slika 7: Metoda pravokotnikov - primer

Metoda trapezov - interval (a, b) razdelimo na 6 delov

Prikažimo še metodo trapezov, ko interval (a, b) tudi tu razdelimo na 6 enakih delov, kar prikazuje slika 8. Iz slike je razvidno, kako aproksimirano površino pod krivuljo.



Slika 8: Metoda trapezov - primer