# Vaja 3: **Izračun položajev satelitov GNSS**

**NAVODILA:**

**Naloga: Izračun položaja satelita iz preciznih efemerid**
Pri vaji bomo uporabili končne precizne efemeride izbranega satelita GPS prejšne vaje. Naredite:

- Iz datoteke preciznih efemerid si izpišite vse vrstice, ki podajajo položaj vašega izbranega satelita.
- Izberite si poljubna dva zaporedna trenutka, za katerega imate podan položaj satelita, pazite le, **da ne izberete med prvimi in zadnjimi desetimi položaji**.
- Med obema izbranima položajema na osnovi Lagrangejeve interpolacije izračunajte položaj 300 s in 600 s po času prvega izbranega položaja satelita, in sicer:
  - stopnje polinoma: 1, 3, 5, 7, 9
  - rezultat primerjajte z rezultati programa `SatPos.exe`

  Naredite grafične in numerične primerjave.

**Naloga: Izračun položaja satelita z numerično integracijo (s satelita oddane efemeride GLONASS)**
Podano imate diferencialno enačbo 1. reda:

$$y'(x) + y(x)\cos(3x) = 3 - x\sin(5x)$$

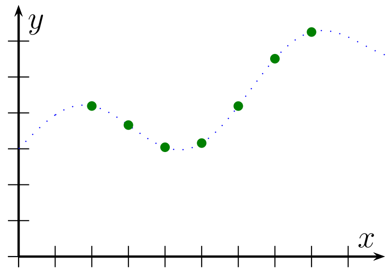
z začetnimi pogoji $x_0 = 1$, $y_0(x_0) = 1$. Neznano funkcijo $y(x)$, na intervalu $I = [1, 5]$ koordinate $x$ aproksimirajte z dvema numeričnima metodama reševanja diferencialnih enačb, in sicer z:

- Eulerjevo metodo in
- metodo Runge-Kutta 2. reda.

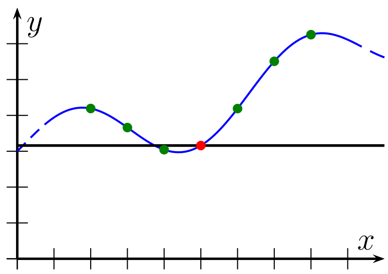
Pri obeh metodah analizirajte vpliv velikosti koraka $\Delta x$ na končne rezultate.

**Lagrangejeva interpolacija - Lagrangejevi polinomi**

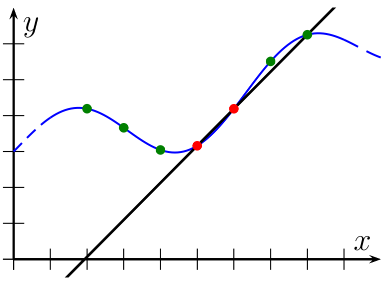
Podan imamo niz diskretnih točk v ravnini: $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $\ldots$, $(x_i, y_i)$, $\ldots$, $(x_n, y_n)$, skupno to pomeni $n+1$ točk v ravnini. Na prvi spodnji sliki so prikazane kot temno zelene pike, neznana funkcija, ki jo želimo interpolirati, pa je prikazana s pikčasto modro krivuljo. Pri Lagrangejevi interpolaciji hočemo dobiti polinom, ki naj bi čim bolje aproksimiral neznano krivuljo in gre skozi vse točke. Pri $n+1$ točkah to pomeni, da je $n$-te stopnje. Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_polynomial



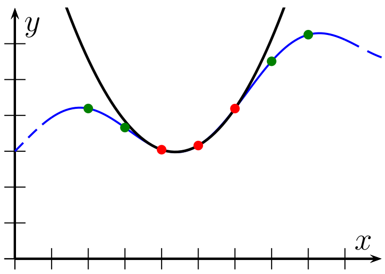

(a) Točke v ranini



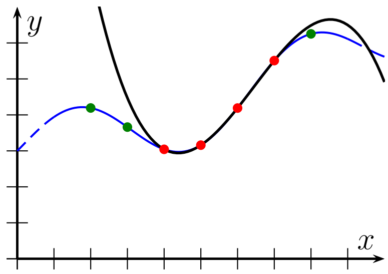

(b) 0. stopnja



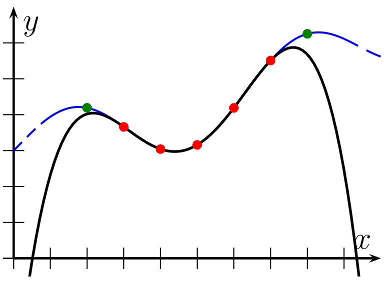

(c) 1. stopnja



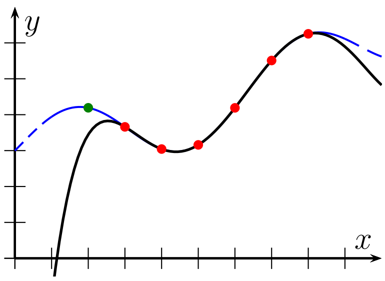

(d) 2. stopnja



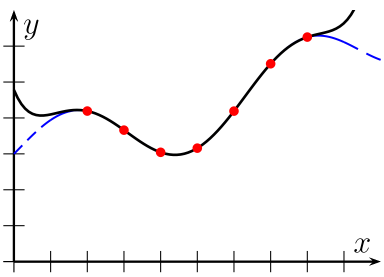

(e) 3. stopnja




(f) 4. stopnja




(g) 5. stopnja




(h) 6. stopnja

**Polinom:**
Velja:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i P_i(x) = y_0 P_0(x) + y_1 P_1(x) + \cdots + y_i P_i(x) + \cdots + y_n P_n(x) \tag{1}$$

Polinom $P_i(x)$ iz enačbe 1 zapišemo kot:

$$P_i(x) = \frac{F_i(x)}{L_i} = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \tag{2}$$

Primeri:

- Polinom 0. stopnje: podano imamo le $(x_0, y_0)$

$$y(x) = y_0 \tag{3}$$

- Polinom 1. stopnje: podano imamo $(x_0, y_0)$ in $(x_1, y_1)$

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 P_0(x) + y_1 P_1(x) = \\ &= y_0 \frac{\cancel{(x-x_0)}(x-x_1)}{\cancel{(x_0-x_0)}(x_0-x_1)} + y_1 \frac{(x-x_0)\cancel{(x-x_1)}}{(x_1-x_0)\cancel{(x_1-x_1)}} = \\ &= y_0 \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \end{aligned} \tag{4}$$

- Polinom 2. stopnje: podano imamo $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ in $(x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} y(x) =& y_0 P_0(x) + y_1 P_1(x) + y_2 P_2(x) = \\ =& y_0 \frac{\cancel{(x-x_0)}(x-x_1)(x-x_2)}{\cancel{(x_0-x_0)}(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \\ & y_1 \frac{(x-x_0)\cancel{(x-x_1)}(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cancel{(x_1-x_1)}(x_1-x_2)} + \\ & y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cancel{(x-x_2)}}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\cancel{(x_2-x_2)}} = \\ =& y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{aligned} \tag{5}$$

**Numerično reševanje diferencialnih enačb - Eulerjeva metoda**

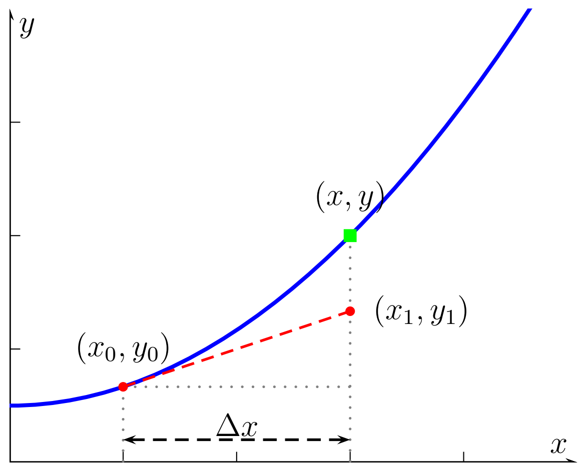
Pri Eulerjevi metodi imamo podano:

- diferencialno enačbo 1. reda: $y'(x) = f(x, y)$
- začetni pogoj (začetno točko na krivulji): $x_0$, $y_0$

Zanima nas neznana/iskana funkcija $y(x)$ na nekem intervalu $I$ (interval je podan za koordinato $x$). Odvod funkcije $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$ nam predstavlja naklon tangente na funkcijo $y(x)$ v točki $(x_i, y_i)$. Če si izberemo nek korak $\Delta x$, s katerim bomo računali zaporedne koordinate $x_i$, potem na osnovi poznane vrednosti funkcije v začetni točki $(x_0, y_0)$ (začetni pogoj), lahko aproksimiramo naslednjo točko $(x_1, y_1)$ kot:

$$x_1 = x_0 + \Delta x \qquad y_1 = y_0 + \Delta x\, y'(x_0) = y_0 + \Delta x\, f(x_0, y_0) \tag{6}$$

Zgornjo enačbo uporabljamo naprej (določimo $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $\ldots$), dokler ne pridemo do konca intervala $I$. Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method




Slika 1: Eulerjeva metoda

Na sliki 1 je z modro krivuljo prikazana prava (neznana) funkcija $y(x)$, ki jo skušamo določiti. Poznamo točko $(x_0, y_0)$, ki je naš začetni pogoj, lahko pa izračunamo tudi odvod v tej točki ($y'(x_0) = f(x_0, y_0)$). Vrednost funkcije $y_1$, pri koordinati $x_1$, dobimo tako, da "potujemo" po tangenti na funkcijo pri $x_0$ (rdeča črtkana linija) med koordinatama $x_0$ in $x_1$. Izračunan približek $y_1$ je nadomestek prave vrednosti $y$. Iz slike je razvidno, da je velikost napake $y - y_1$ neposredno odvisna od velikosti koraka $\Delta x$.

**Numerično reševanje diferencialnih enačb - Metoda Runge-Kutta 2. reda (RK2)**

Tudi pri metodi RK2 imamo podano:

- diferencialno enačbo 1. reda: $y'(x) = f(x, y)$
- začetni pogoj (začetno točko na krivulji): $x_0,\ y_0$

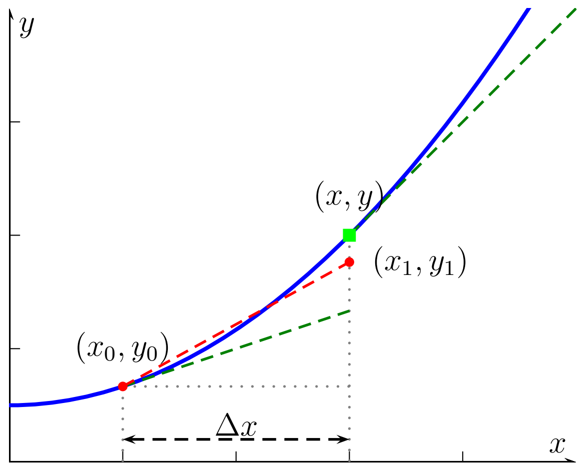
Naloga pa seveda ista, določiti neznano/iskano funkcijo $y(x)$ na nekem intervalu $I$. Izračun prve točke $(x_1, y_1)$ pri metodi RK2 deluje tako, da poskušamo določiti tudi naklon funkcije v točki $(x_1, y_1)$, ki ga uporabimo nato za izračun $(x_1, y_1)$. Koraki so:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \Delta x && (7)\\
k_1 &= y'(x_0) = f(x_0, y_0) && (8)\\
k_2 &= f(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta x}{2} k_1) && (9)\\
y_1 &= y_0 + \Delta x\, k_2 && (10)
\end{aligned}
$$

Končna enačba pri metodi RK2 je tako:

$$x_1 = x_0 + \Delta x \qquad y_1 = y_0 + \Delta x f(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta x}{2} f(x_0, y_0)) \tag{11}$$

Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods




Slika 2: Metoda Runge-Kutta 2. reda

Geometrijski prikaz metode RK2 je podan na sliki 2. Izhodišče je enako kot pri Eulerjevi metodi (začetni pogoj in odvod funkcije za poljubno točko poznamo). Tudi tu "potujemo" po rdeči črtkani liniji, razlika je le v tem, da ta linija ne predstavlja tangento v točki $(x_0, y_0)$, ampak tangento na sredini med $x_0$ in $x_1$. Naklon te (srednje) tangente dobimo tako, da prvo izračunamo srednji $x$ $(= x_0 + \frac{\Delta x}{2})$ in njemu pripadajoči $y$ $(= y_0 + \frac{\Delta x}{2} k_1)$ ter nato izračunamo naklon krivulje v tej točki. Zaradi izračuna tangente v srednji točki in ne v začetni točki, je točnost metode RK2 večja.