Vaja 7: **Optimizacija 2. reda**

NAVODILA:

Nastavite optimalno shemo opazovanj z optimalnimi natančnostmi pri podani geodetski mreži. Pri optimizaciji postopajte po naslednjih korakih:

1. obdelajte geodetsko mrežo z vsemi možnimi opazovanji,
2. izvedite optimizacijo 2. reda in
3. na osnovi rezultata prejšnjega koraka geodetsko mrežo obdelajte na osnovi optimiziranega niza opazovanj.

Ponovite zgoraj podan algoritem za že optimizirano geodetsko mrežo (naredite 2. iteracijo optimizacije).

Matrika kriterija, ki opisuje optimalne natančnosti koordinat, naj določa standardni odklon vseh novih koordinat geodetske mreže velikosti $\sigma_k = 2\,\mathrm{mm}$ ($\mathbf{\Sigma}_k = \sigma_k^2 \mathbf{I}_{u \times u}$).

Tehnično poročilo skupaj z rezultati obdelave oddajte na spletno učilnico.

POMOČ:

Osnovno izhodišče optimizacije 2. reda:

Izhajamo iz enačbe za izračun matrike kofaktorjev neznank $\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}$:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}{}^{-1} \tag{1}$$

Pri optimizaciji 2. reda iščemo tako diagonalno matriko uteži $\mathbf{P}$, ki bo podala najmanjšo možno razliko $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}} - \mathbf{Q}_k \tag{2}$$

V enačbi 2 matrika $\mathbf{Q}_k$ predstavlja kriterijsko matriko kofaktorjev, ki je z matriko kriterija $\mathbf{\Sigma}_k$ povezana z:

$$\mathbf{Q}_k = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma}_k \tag{3}$$

Glede na enačbo 1 in enačbo 2 iščemo tako diagonalno matriko uteži $\mathbf{P}$, oz. uteži opazovanj, za katere bo veljalo:

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} - \mathbf{Q}_k^{-1} \rightarrow \min. \tag{4}$$

Enačbo 4 se prevede na sistem linearnih enačb oblike:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{d} \quad \text{in} \quad \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \rightarrow \min. \tag{5}$$

V enačbi 5 so elementi določeni kot:

$\mathbf{A} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \odot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)$	Matrika $\mathbf{A}$ dobljena s Khatri-Rao[1] produktom (oznaka $\odot$) matrike $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ same s seboj.
$\mathbf{p} = diag(\mathbf{P})$	Vektor diagonalnih elementov matrike uteži $\mathbf{P}$.
$\mathbf{q} = vec(\mathbf{Q}_k^{-1})$	Vektor vseh elementov kriterijske matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_k^{-1}$.
$\mathbf{d} = vec(\mathbf{D})$	Vektor vseh elementov matrike $\mathbf{D}$ iz enačbe 2.

Rešitev enačbe 5 je podana z:

$$\mathbf{p} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{+}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{q} \tag{6}$$

V enačbi 6 predstavlja $^{+}$ oznako za psevdoinverzijo (v matlabu funkcija `pinv()`). Na osnovi izračunanih uteži v vektorju $\mathbf{p}$ lahko določimo shemo in natančnosti, s katerimi izvedemo opazovanja, da se čim bolj približamo pogoju v matriki kriterija $\mathbf{\Sigma}_k$.

Izračunane uteži iz enačbe 6 so izhodišče za optimizacijo geodetskih opazovanj. Poračunane uteži je potrebno razdeliti na dva dela, in sicer:

[1] o Khatri-Rao produktu si lahko preberete na http://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_product

- za utež i-tega opazovanja p_i velja: $p_i < 0 \vee p_i \approx 0$ in
- za utež i-tega opazovanja p_i velja: $p_i >> 0$.

V prvem primeru, ko je utež p_i negativna, ali majhna vrednost, pomeni, da lahko to opazovanjo iz nabora opazovanj črtamo, saj ne prinesejo nič k končni rešitvi. V drugem primeru, ko je utež opazovanja p_i pozitivna in "znatno velika" pa je potrebno izračunati, s kakšno natančnostjo σ_i je potrebno izvesti opazovanja na terenu, da dobimo želene rezultate. Natančnost i-tega opazovanja σ_i se izračuna kot:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{p_i}} \tag{7}$$

Khatri-Rao produkt:
Za podani matriki $\mathbf{A}_{m\times k} = [a]_{ij} = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \cdots\, \mathbf{a}_k]$ in $\mathbf{B}_{n\times k} = [b]_{ij} = [\mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2\, \cdots\, \mathbf{b}_k]$, dobimo matriko $\mathbf{C}_{mn\times k}$ kot:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{b}_1 & a_{12}\mathbf{b}_2 & \cdots & a_{1k}\mathbf{b}_k \\ a_{21}\mathbf{b}_1 & a_{22}\mathbf{b}_2 & \cdots & a_{2k}\mathbf{b}_k \\ a_{31}\mathbf{b}_1 & a_{32}\mathbf{b}_2 & \cdots & a_{3k}\mathbf{b}_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{b}_1 & a_{m2}\mathbf{b}_2 & \cdots & a_{mk}\mathbf{b}_k \end{bmatrix} \tag{8}$$

Pogoj Khatri-Rao produkta iz enačbe 8 je, da imata matriki **A** in **B** enako število stolpcev. Khatri-Rao produkt je variacija Kroneckerjevega produkta.

Operator *vec*:
Za podano matriko $\mathbf{A}_{m\times k} = [a]_{ij} = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \cdots\, \mathbf{a}_k]$ operator $vec(\mathbf{A})$ vrne vektor $\mathbf{a}_{mk\times 1}$:

$$\mathbf{a} = vec(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} \tag{9}$$

Vse vektorje matrike **A** samo zložimo enega pod drugim.