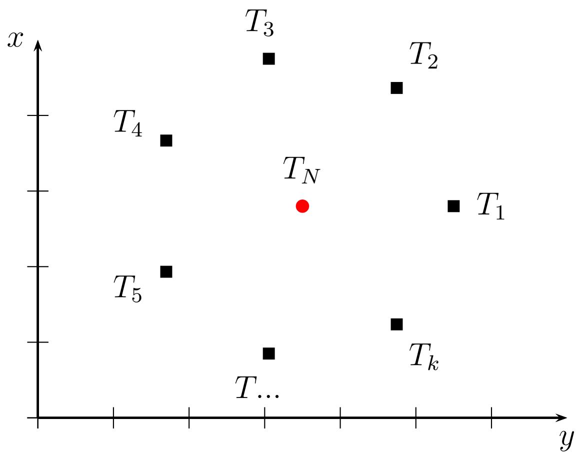
Vaja 5-1: **Vpliv geometrije mreže na iskanje grobih pogreškov – število danih točk**



Slika 1: Določitev koordinat nove točke T_N na osnovi k danih točk

NAVODILA:

Analizirati želimo postopek iskanja grobih pogreškov v geodetski mreži. V tem delu vaje nas zanima, kako vpliva **število danih točk**, in posledično število opazovanj, na zmožnost odkrivanja grobih pogreškov v matematičnega modela izravnave po MNK. Koordinate nove točke T_N bomo določili tako, da bomo imeli:

- (2[1],)3, 4, 5, 6,..., k danih točk in
- tri vrste opazovanj – kotna, dolžinska in GNSS-opazovanja.

Položaj točke T_N bomo določili tako, da bomo imeli dane točke T_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ enakomerno in na enaki oddaljenosti razporejene okoli nove točke, v opazovanjih pa bo prisoten le en grobi pogrešek, pri opazovanju s prve točke (T_1). Pri k-tih danih točkah bodo opazovanja:

- k izmerjenih dolžin, $d_i = ||T_iT_N||$,
- k izmerjenih kotov, $\alpha_i = \angle T_iT_{i-1}T_N$ (T_i stojiščna točka, proti T_{i-1} začetna smer, proti T_N končna smer)
- k izmerjenih baznih vektorjev, $\mathbf{r}_i = T_N - T_i$.

Nastavite velikost grobega pogreška na 2.5 cm za dolžino in vektor ter 15″ za kot. Obdelajte geodetsko mrežo in rezultate analizirajte s stališča dobljenih:

[1] 2 dani točki samo za vektorje GNSS

- popravkov približnih vrednosti neznank δy_N in δx_N (označeni kot `dX` in `dY` v izhodni datoteki s končnico `.GGM`),
- popravkov opazovanj v_i, $i = d, \alpha, \Delta y, \Delta x$ (označeni kot `VD`, `VK` in `VVEC` za dolžine, kote in komponente vektorja v izhodni datoteki s končnico `.GGM`),
- števila nadštevilnosti opazovanj r_i (označena kot `Rii` v izhodni datoteki s končnico `.GGM`),
- standardiziranih popravkov ω_i (označeni kot `W` v izhodni datoteki s končnico `.GGM`),
- notranje zanesljivosti opazovanj ∇l_i (označena kot `NAB` v izhodni datoteki s končnico `.GGM`) in
- zunanje zanesljivosti opazovanj λ_i (označena kot `LAM` v izhodni datoteki s končnico `.GGM`).

V osnovi nas zanima:

- Kako grobi pogrešek "pokvari" neznanke in kako popravke? Ali je to kaj odvisno od števila danih točk?
- Kakšno vlogo pri tem imajo v_i, r_i, ω_i, ∇l_i in λ_i (glej vaje pri predmetu *Izravnalni račun 3*)?
- Kako število danih točk vpliva na vse izračunane elemente? Se spreminjajo in če se, kako?
- Ali lahko prisotni grobi pogrešek vedno odkrijemo? Ali je izračunan odkriti grobi pogrešek vedno prave vrednosti in pri pravem opazovanju?
- Kako bi lahko rezultate geometrično pojasnili?

Vse rezultate na kratko predstavite v tehničnem poročilu in ga oddajte na spletno učilnico.

POMOČ:

Matrika nadštevilnosti R:
Matrika nadštevilnosti $\mathbf{R}$ je matrika velikosti $n \times n$ in se jo izračuna kot:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_{n\times n} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathbf{vv}}\mathbf{P} \tag{1}$$

$\mathbf{R}$ je polna matrika, ki preslika vektor odstopanj $\mathbf{f}$ v vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\,\mathbf{f} \tag{2}$$

Iz enačb 2 in 1 sledi, da je popravek i-tega opazovanja izračunan kot:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \cdot f_j \tag{3}$$

Enačba 3 prikazuje, kako se pogreški opazovanj (v vektorju $\mathbf{f}$) prelijejo v popravke. Na popravek i-tega opazovanja tako vplivajo pogreški vseh opazovanj. Ključnega pomena pri obravnavanju matrike nadštevilnosti $\mathbf{R}$ so diagonalni elementi matrike, ki jih označimo z r_i in se imenujejo števila nadštevilnosti. Za števila nadštevilnosti r_i velja:

1. $0 \leq r_i \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$
3. $\delta v_i = -\dfrac{v_i}{r_i}$

V enačbi 4 δv_i predstavlja ocenjeno velikost grobega pogreška, ki je prisoten v i-tem opazovanju in smo ga locirali s postopkom pregleda opazovanj (glej naslednje podpoglavje). Glede na lastnosti števil nadštevilnosti lahko zaključimo:

- $r_i \rightarrow 1$, pogrešek i-tega opazovanja (v vektorju $\mathbf{f}$) se v večini prelije na popravek i-tega opazovanja (za ostale popravke in neznanke ga ne "ostane veliko").

- $r_i \rightarrow 0$, pogrešek i-tega opazovanja (v vektorju $\mathbf{f}$) se samo v manjšem delu prelije na popravek i-tega opazovanja (ostali del se prelije na ostale popravke in neznanke).

Število nadštevilnosti prikazuje zmožnost geodetske mreže pri nadziranju nad prisotnostjo grobih pogreškov. Večje kot je število nadštevilnosti določenega opazovanja, večjo možnost imamo, da odkrijemo in odstranimo možen prisoten grobi pogrešek tega opazovanja.

Matrika nadštevilnosti $\mathbf{R}$ in posledično števila nadštevilnosti r_i so odvisni od le geometrije geodetske mreže (matrika $\mathbf{B}$) in natančnosti opazovanj ($\mathbf{P}$).

Ugotavljanje grobih pogreškov po Baardovi metodi - Pregled opazovanj:
Baardova metoda ("data snooping" oz. pregled opazovanj) temelji na predpostavki, da so

natančnosti opazovanj znane, kar pomeni, da je poznana kovariančna matrika opazovanj $\mathbf{\Sigma}$. Za vsako opazovanje posebej računamo testno statistiko ω_i po enačbi:

$$\omega_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sigma_0 \sqrt{q_{v_i}}} \tag{4}$$

Testna statistika ω_i iz enačbe 4 se porazdeljuje po normalni porazdelitvi. Velja, da i-tega opazovanja ne moremo obravnavati kot grobo pogrešenega, če pri določeni stopnji značilnosti testa α velja:

$$|\omega_i| < N_{1-\alpha/2}(0,1) \tag{5}$$

Pogoste vrednosti za α sta $\alpha = 0.01$ ($N_{0.995}(0,1) = 2.576$), in $\alpha = 0.001$ ($N_{0.9995}(0,1) = 3.291$). Grobo lahko rečemo, če je pogrešek $|v_i|$ od svoje natančnosti σ_{v_i} večji za faktor 3 (ali več), ga lahko obravnavamo kot verjetno grobo pogrešenega.

Notranja zanesljivost opazovanj:

Pri zanesljivosti opazovanj skušamo ovrednotiti sposobnost matematičnega modela izravnave, da se upre vplivu grobih pogreškov. Pri notranji zanesljivosti ugotavljamo, kako velik je še lahko pogrešek v opazovanjih, da ga postopek pregleda opazovanj še odkrije. Ob predpostavki, da imamo naenkrat opravka samo z enim grobim pogreškom, je spodnja meja, na kateri grobi pogrešek še lahko ugotovimo, dana z notranjo zanesljivostjo i-tega opazovanja ∇l_i:

$$\nabla l_i = \sigma_i \cdot \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \tag{6}$$

V enačbi 6 predstavlja σ_i natančnost i-tega opazovanja (∇l_i ima torej enote iste kot opazovanje), δ_0 pa še najmanjšo ugotovljivo “oddaljenost” ničelne in alternativne hipoteze iskanja grobih pogreškov pri izbrani stopnji značilnosti α in jakosti $1 - \beta$ testa. Za praktično uporabo lahko uporabimo: $\delta_0 = 3.2416$. Iz enačbe 6 je razvidno, da je notranja zanesljivost obratno sorazmerna s korenom števila nadštevilnosti.

Na osnovi notranjih zanesljivosti opazovanj lahko izračunamo tudi povprečno vrednost zanesljivosti opazovanj $\bar{\nabla} l$. Ker imajo zanesljivosti opazovanj enote določene z vrsto opazovanj, je smiselno poračunati povprečne vrednosti zanesljivosti le za iste vrste opazovanj:

$$\bar{\nabla} l = \frac{1}{n_v} \sum \nabla l \tag{7}$$

V enačbi 7 število n_v predstavlja število vseh opazovanj iste vrste.

Zunanja zanesljivost opazovanj:

Z zunanjo zanesljivostjo λ_i ugotavljamo, kako grobi pogrešek vpliva na neznanke geodetske mreže (koordinate točk). Če grobega pogreška ne odkrijemo, bi bilo idealno, da bi bil vpliv tega pogreška čim manjši. Zunanjo zanesljivost i-tega opazovanja izračunamo kot:

$$\lambda_i = \delta_0 \cdot \left(\frac{1}{r_i} - 1 \right) \tag{8}$$

Zunanja zanesljivost je brezdimenzijsko število, torej nima enot. V geodetski mreži gledamo razmerja med vrednostmi λ_i opazovanj.