Vaja 4: **Prostorska podobnostna transformacija**

Opazovane so koordinate 6-ih točk v dveh koordinatnih sistemih (glej datoteko s podatki `V4_Podatki.txt`). Prostorska razporeditev točk je podana na sliki `AstroGeodetska-MrezaSLO.jpg`. Na osnovi opazovanih koordinat naredite:

- s splošnim modelom izravnave ocenite transformacijske parametre iz sistema ETRS v sistem GK,
- izračunajte popravke opazovanj (koordinat) po izravnavi,
- izvedite globalni test modela ($\alpha = 0.05$),
- določite natančnost ocenjenih transformacijskih parametrov,
- izračunajte transformirane koordinate točk iz sistema ETRS v sistem GK,
- preverite, ali sta koordinatna sistema skladna ob stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$.

Prostorska podobnostna transformacija

Opazovane imamo koordinate k-tih točk v dveh koordinatnih sistemih (A in B). Za vsako točko lahko zapišemo enačbo 7-parametrične podobnostne prostorske transformacije, ki ima obliko:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{T} + m\mathbf{R}\mathbf{x}_A \tag{1}$$

- $\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & z_A \end{bmatrix}^\mathrm{T}$ – koordinate točke v začetnem koordinatnem sistemu (A),
- $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_B & y_B & z_B \end{bmatrix}^\mathrm{T}$ – transformirane koordinate točke v končnem koordinatnem sistemu (B),
- $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^\mathrm{T}$ – vektor premika za vse tri koordinatne osi,
- m – parameter merila ob prehodu iz enega v drugi koordinatni sistem $m = 1 + \Delta m$,
- $\mathbf{R}$ – rotacijska matrika, ki izvede zasuke okoli vseh treh koordinatnih osi in ima obliko:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x\mathbf{R}_y\mathbf{R}_z \tag{2}$$

- $\mathbf{R}_x$ – rotacijska matrika, ki izvede zasuk okoli x osi za kot ω_x:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_x) & -\sin(\omega_x) \\ 0 & \sin(\omega_x) & \cos(\omega_x) \end{bmatrix} \tag{3}$$

- $\mathbf{R}_y$ – rotacijska matrika, ki izvede zasuk okoli y osi za kot ω_y:

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\omega_y) & 0 & \sin(\omega_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\omega_y) & 0 & \cos(\omega_y) \end{bmatrix} \tag{4}$$

- $\mathbf{R}_z$ – rotacijska matrika, ki izvede zasuk okoli z osi za kot ω_z:

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(\omega_z) & -\sin(\omega_z) & 0 \\ \sin(\omega_z) & \cos(\omega_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Osnovne nastavitve splošnega modela izravnave

Število opazovanj n je enako številu vseh koordinat vseh točk, torej:

$$n = (3+3)k = 6k$$

Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ vsebuje vse opazovane koordinate, vseh točk v obeh sistemih, in je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_{A,1} & y_{A,1} & z_{A,1} & x_{B,1} & y_{B,1} & z_{B,1} & \cdots & x_{A,k} & y_{A,k} & z_{A,k} & x_{B,k} & y_{B,k} & z_{B,k} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \tag{6}$$

Število neznank u je enako številu transformacijskih parametrov, torej:

$$u = 7$$

kjer je vektor neznank $\mathbf{x}$ enak:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ m \end{bmatrix} \tag{7}$$

Minimalno število opazovanj n_0, ki jih potrebujemo za rešitev problema, pa je enako številu neznank u, kjer moramo dodatno upoštevati še koordinate vsake točke v sistemu A, torej:

$$n_0 = u + 3k$$

Število nadštevilnih opazovanj r, je tako enako:

$$r = n - n_0 = 6k - u - 3k = 3k - u$$

Število enačb c, ki jih sestavimo, je enako vsoti števila neznank u in števila nadštevilnih opazovanj r, torej:

$$c = r + u = 3k - u + u = 3k$$

Sestava enačb splošnega modela izravnave

Sestaviti moramo $c = 3k$ enačb, za vsako točko torej 3. Izhajamo iz vektorske enačbe 1, ki pa jo za splošni model izravnave in za i-to točko preuredimo v:

$$\mathrm{F}_i \equiv \mathbf{T} + m\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}}_{A,i} - \hat{\mathbf{x}}_{B,i} = \mathbf{0} \tag{8}$$

Za vse točke enačbe sestavimo torej kot:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_1 &\equiv \mathbf{T} + m\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}}_{A,1} - \hat{\mathbf{x}}_{B,1} = \mathbf{0} \\ \mathrm{F}_2 &\equiv \mathbf{T} + m\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}}_{A,2} - \hat{\mathbf{x}}_{B,2} = \mathbf{0} \\ &\vdots \qquad \vdots \\ \mathrm{F}_k &\equiv \mathbf{T} + m\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}}_{A,k} - \hat{\mathbf{x}}_{B,k} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{9}$$

Linearizacija za vsako točko posebej

Če obravnavamo enačbo 8 kot tri skalarne enačbe, pridemo do treh dolgih in kompliciranih enačb[1], zato je enostavneje na enačbo 8 gledati vektorsko/matrično. Za linearizacijo enačbe 8 je potrebno pri vsako točki izvesti sledeče odvode:

[1]izračunajte produkte vseh treh rotacijskih matrik...

- po vseh 6-ih opazovanjih, koordinatah točke v sistemu A (po vektorju $\mathbf{x}_{A,i}$) in koordinatah točke v sistemu B (po vektorju $\mathbf{x}_{B,i}$) in
- po vseh 7-ih neznankah (po vseh treh premikih – po vektorju $\mathbf{T}$, po vseh treh rotacijah – po kotih ω_x, ω_y in ω_z in po merilu m).

V vektorski obliki so odvodi enačbe 8 po opazovanjih, po vektorjih $\mathbf{x}_{A,i}$ in $\mathbf{x}_{B,i}$, enaki:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{x}_{A,i}} = m\mathbf{R} \qquad \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{x}_{B,i}} = -\mathbf{I} \tag{10}$$

Parcialni odvodi po vseh neznankah pa so v vektorski obliki enaki:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{T}} &= \mathbf{I} \\
\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \omega_x} &= m\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega_x}\mathbf{x}_{A,i} = m\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \omega_x}\mathbf{R}_y\mathbf{R}_z\mathbf{x}_{A,i} \\
\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \omega_y} &= m\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega_y}\mathbf{x}_{A,i} = m\mathbf{R}_x\frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial \omega_y}\mathbf{R}_z\mathbf{x}_{A,i} \\
\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \omega_z} &= m\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega_z}\mathbf{x}_{A,i} = m\mathbf{R}_x\mathbf{R}_y\frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \omega_z}\mathbf{x}_{A,i} \\
\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial m} &= \mathbf{R}\mathbf{x}_{A,i}
\end{aligned} \tag{11}$$

Odvodi rotacijskih matrik iz enačbe 11 so enaki:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{R}_x}{\partial \omega_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\omega_x) & -\cos(\omega_x) \\ 0 & \cos(\omega_x) & -\sin(\omega_x) \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{R}_y}{\partial \omega_y} = \begin{bmatrix} -\sin(\omega_y) & 0 & \cos(\omega_y) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\omega_y) & 0 & -\sin(\omega_y) \end{bmatrix} \\
&\frac{\partial \mathbf{R}_z}{\partial \omega_z} = \begin{bmatrix} -\sin(\omega_z) & -\cos(\omega_z) & 0 \\ \cos(\omega_z) & -\sin(\omega_z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$

Osnovni matrični model izravnave prostorske transformacije

Sestavljene vse enačbe iz 9 za vse točke lineariziramo in zapišemo v osnovnem matričnem modelu splošnega modela izravnave kot:

$$\mathbf{A}_{c\times n}\mathbf{v}_{n\times 1} + \mathbf{B}_{c\times u}\mathbf{\Delta}_{u\times 1} = \mathbf{f}_{c\times 1} \tag{13}$$

Kjer so:

$\mathbf{v}_{n\times 1}$ vektor popravkov opazovanj (vseh koordinat točk)

$\mathbf{\Delta}_{u\times 1}$ vektor popravkov približnih vrednosti neznank

$\mathbf{A}_{c\times n}$ matrika koeficientov $\mathbf{A}$ – parcialni odvodi po opazovanjih (koordinatah)

$\mathbf{B}_{c\times u}$ matrika koeficientov $\mathbf{B}$ – parcialni odvodi po neznankah

$\mathbf{f}_{c\times 1}$ vektor odstopanj

Ko odvajamo vse sestavljene enačbe 9 po vseh opazovanjih, dobimo matriko $\mathbf{A}$, ki je "velika", a ima tudi veliko ničelnih elementov:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} m\mathbf{R} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Matrika $\mathbf{B}$ pa ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & m\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega_x}\mathbf{x}_{A,i} & m\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega_y}\mathbf{x}_{A,i} & m\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega_z}\mathbf{x}_{A,i} & \mathbf{R}\mathbf{x}_{A,i} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Stohastični model nastavimo s kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$, referenčno varianco a-priori σ_0^2, matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$.

Rešitev funkcionalnega modela izravnave

- Matrika kofaktorjev in matrika uteži ekvivalentnih opazovanj / enačb:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e &= \mathbf{A}\mathbf{Q}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{P}_e &= \mathbf{Q}_e^{-1} \end{aligned} \tag{16}$$

- Sistem normalnih enačb:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e\,\mathbf{B} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e\,\mathbf{f} \end{aligned} \tag{17}$$

- Rešitev funkcijskega modela:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e(\mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{\Delta}) \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{18}$$

Rešitev stohastičnega modela

- Referenčna varianca a-posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} \tag{19}$$

- Matrike kofaktorjev elementov funkcijskega modela:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e\right)\mathbf{A}\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} \end{aligned} \tag{20}$$

Skladnost dveh koordinatnih sistemov: sestavimo ničelno in alternativno hipotezo:

$H_0 : \mathbf{x}^A = \mathbf{x}^B \ \ldots$	koordinate v sistemu A SO skladne s koordinatmi iz sistema B
$H_1 : \mathbf{x}^A \neq \mathbf{x}^B \ \ldots$	koordinate v sistemu A NISO skladne s koordinatmi iz sistema B

Sestavimo testno statistiko:

$$z = (\mathbf{x}_B - \tilde{\mathbf{x}}_A)^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Sigma}_A + \mathbf{\Sigma}_B)^{-1}(\mathbf{x}_B - \tilde{\mathbf{x}}_A) \tag{21}$$

kjer vektor $\tilde{\mathbf{x}}_A$ predstavlja transformirane koordinate točk iz sistema A v sistem B. Testna statistika z je skalar, ki se porazdeljuje po χ^2 porazdelitvi z $3k$ prostostnimi stopnjami (število elementov v vektorju $\mathbf{x}_B$ ali $\tilde{\mathbf{x}}_A$).