## Vaja 3 - 2: **Velika mreža Strunjan - zagotovitev geodetskega datuma**

V geodetskem štirikotniku, kjer ste nastavili osnovni matrični model in sistem normalnih enačb, zagotovite geodetski datum z:

- datumsko matriko $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ - minimalno število zunanjih vezi in
- datumsko matriko $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ - notranje vezi (tudi prosta mreža).

V obeh primerih določite:

- $\boldsymbol{\Delta}, \mathbf{v}, \hat{\mathbf{l}}$ - vektor popravkov približnih vrednosti neznank, vektor popravkov opazovanj in vektor izravnanih opazovanj,
- $\hat{\sigma}_0^2$ - referenčno varianco a-posteriori in izvedite globalni test modela ($\alpha = 0.05$),
- $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{vv}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}}$ - kovariančne matrike neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj.

**Zagotovitev geodetskega datuma**

Geodetski datum v splošnem predstavlja niz datumskih parametrov. Ti parametri definirajo povezavo med poljubnim terestričnim pravokotnim karteričnim koordinatnim sistemom (osi $xyz$), s pripadajočim referenčnim elipsoidom s krivočrtnimi geodetskimi koordinatami ($\varphi\lambda h$), in globalnim terestričnim pravokotnim kartezičnim koordinatnim sistemom (osi $XYZ$) oz. telesom Zemlje.

V primeru terestrično opazovane geodetske mreže izvajamo opazovanja, ki so samo posredno povezana z neznankami. Opazovanja sama ne zagotavljajo možnost določitve koordinat točk geodetske mreže, saj podajajo le relativne odnose med točkami (oddaljenosti, koti,...). Nujno je poznavanje danih količin (danih točk, danih smeri), preko katerih lahko določimo koordinate novih točk. Dane količine v primeru terestrično opazovane geodetske mreže predstavljajo geodetski datum mreže. Nepoznavanje ali ne-vzpostavitev geodetskega datuma se nam neposredno kaže v singularnosti matrike $\mathbf{N}$ sistema normalnih enačb. V ravnini moramo zagotoviti 4 datumske parametre:

- dva parametre premika: $\mathbf{t} = [t_y \; t_x]^T$,
- parametre zasuka: $\omega$ (okoli osi $z$) in
- sprememba merila: $m$.

Določena opazovanja vsebujejo določene informacije o datumskih parametrih (v 3R prostoru):

| **Opazovanje** | **Datumski parameter** |
|---|---|
| Smerni kot (azimut ) $\nu$ | $\omega_z$ |
| Opazovana smer $s$, kot $\alpha$ | - |
| Zenitna razdalja $z$ | $\omega_x,\ \omega_y$ |
| Dolžina $d$ | $m$ |
| GNSS vektor $\Delta\mathbf{r}$ | $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z,\ m$ |
| GNSS kordinate $\mathbf{r}$ | $t_x,\ t_y,\ t_z$ |

Preglednica 1: Geodetska opazovanja in pripadajoče datumske informacije

Število datumskih parametrov, ki jih ne moremo določiti z opazovanji, imenujemo **defekt datuma**, kar moramo pri obdelavi opazovanj geodetske mreže odpraviti. To pomeni, da moramo pri geodetski mreži zagotoviti geodetski datum mreže. Geodetski datum mora biti določen enolično, ne sme biti pre-določen (damo preveč danih količin) in pod-določen (premalo danih količin). Problem pri pre-določenosti geodetskega datuma se pojavi, ko je natančnost opazovanj višja od natančnosti danih točk geodetske mreže. Takrat z neustrezno določenim geodetskim datumom vplivamo na geometrijo mreže - pokvarimo natančna opazovanja.

## Zagotovitev geodetskega datuma z minimalnim številom zunanjih vezi

Pri geodetskem datumi z minimalnim številom zunanih vezi, si izberemo dane točke, smeri in dolžine, ki se po izravnavi ne bodo spremenile. S tem modeliramo vse parametre geodetskega datuma, premika, zasuk in merilo.
Premik geodetske mreže, parametra $t_y$ in $t_x$, določimo tako, da si izberemo eno izmed točk kot dano, npr. točko $i$. Vezna enačba je sestavljena tako, da ta točka po izravnavi ne sme pridobiti popravka, oziroma:

$$\delta y_i = 0 \qquad \delta x_i = 0 \tag{1}$$

Zasuk $\omega$ (okoli $z$ osi) definiramo tako, da si izberemo en smerni kot za danega, npr. s točke $i$ na točko $j$. To pomeni, da se po smerni kot $\nu_i^j$ po izravnavi ne sme spremeniti. Vezna enačba, ki zagotovi zasuk $\omega$, je:

$$\frac{\partial \nu_i^j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \nu_i^j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \nu_i^j}{\partial y_j}\delta y_j + \frac{\partial \nu_i^j}{\partial x_j}\delta x_j = 0 \tag{2}$$

Merilo geodetske mreže $m$ definiramo tako, da si izberemo eno razdaljo med dvema točkama za dano, npr. s točke $i$ na točko $j$. Tudi v tem primeru velja, da se razdalja $d_{ij}$ po izravnavi ne sme spremeniti. Vezna enačba, ki zagotovi merilo $m$, je:

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_j}\delta y_j + \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j}\delta x_j = 0 \tag{3}$$

V matrični obliki lahko vse 4 vezne enačbe 1, 2 in 3 zapišemo kot:

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Delta} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Matrika $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ iz enačbe 4 ima za 4 točke v geodetski mreži obliko:

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \nu_2^3}{\partial y_2} & \frac{\partial \nu_2^3}{\partial x_2} & \frac{\partial \nu_2^3}{\partial y_3} & \frac{\partial \nu_2^3}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial d_{24}}{\partial y_2} & \frac{\partial d_{24}}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial d_{24}}{\partial y_4} & \frac{\partial d_{24}}{\partial x_4} \end{bmatrix} \tag{5}$$

V enačbi 5 ima matrika $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ 4 vrstice, za vsak datumski parameter eno vrstico, parameter $t_y$ modeliramo v prvi vrstici, $t_x$ v drugi vrstici, zasuk $\omega$ v tretji vrstici in merilo $m$ v zadnji, četrti vrstici. Če imamo z opazovanji kak parameter definiran, samo odstranimo ustrezno vrstico v matriki $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$.

## Zagotovitev datuma z notranjimi vezmi - prosta mreža

V določenih primerih ne moremo zagotoviti stabilnosti nobene točke, tako da ne moremo privzeti nobene točke kot dane. Enako lahko rečemo za določeno smer ali dolžino. Pri določitvi datuma z notranjimi vezmi se nanašamo na neko namišljeno točko, neko namišljeno smer in neko namišljeno dolžino. Če povežemo približne koordinate in izravnane koordinate točk s 4-parametrično transformacijo, tako postavimo tri pogoje, ki morajo veljati za ocenjene popravke vseh koordinat točk:

- težišče mreže po izravnavi se ne sme spremeniti (definiramo položaj mreže),
- mreža se po izravnavi ne sme zasukati (definiramo zasuk mreže),
- merilo mreže se po izravnavi ne sme spremeniti (definiramo merilo mreže).

Prvo alinejo, premik mreže, zagotovimo z enačbama:

$$\sum_{i=1}^{k} \delta y_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{u} \delta x_i = 0 \tag{6}$$

Drugo alinejo, zasuk mreže, zagotovimo z enačbo:

$$\sum_{i=1}^{k} (-x_i \delta y_i + y_i \delta x_i) = 0 \tag{7}$$

Tretjo alinejo, merilo mreže, zagotovimo z enačbo:

$$\sum_{i=1}^{k} (y_i \delta y_i + x_i \delta x_i) = 0 \tag{8}$$

V enačbah 6, 7 in 8 $k$ predstavlja število točk v geodetski mreži. Matrično lahko vse 4 enačbe zapišemo v obliki:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0} \tag{9}$$

Matrika $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ iz enačbe 9 ima za 4 točke v geodetski mreži obliko:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -x_1 & y_1 & -x_2 & y_2 & -x_3 & y_3 & -x_4 & y_4 \\ y_1 & x_1 & y_2 & x_2 & y_3 & x_3 & y_4 & x_4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Tudi v enačbi 10 ima matrika $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ 4 vrstice, in tudi tu vsaka vrstica predstavlja modeliranje svojega datumskega parametre. Parameter $t_y$ modeliramo v prvi vrstici, $t_x$ v drugi vrstici, zasuk $\omega$ v tretji vrstici in merilo $m$ v zadnji, četrti vrstici. Če imamo z opazovanji kak parameter definiran, samo odstranimo ustrezno vrstico v matriki $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.

### Rešitev posredne izravnava po MNK

- Sistem normalnih enačb:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} \qquad \mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} \tag{11}$$

- Matrika kofaktorjev neznank, ki je odvisna od načina zagotovitve geodetskega datuma:
  - Minimalno število zunanjih vezi ($\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$)

$$\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}} = \left(\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} - \mathbf{H}\left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

- Notranje vezi - prosta mreža ($\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$)

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}} = \left(\mathbf{N} + \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} - \mathbf{H}\left(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

- Popravki približnih vrednosti neznank:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}\mathbf{t} \tag{14}$$

- Popravki opazovanj in izravnana opazovanja:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{\Delta} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \tag{15}$$

- Matrika nadštevilnosti:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}_{n\times n} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathbf{vv}}\mathbf{P} \tag{16}$$

- Referenčna varianca a-posteriori in globalni test:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n-u+d} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n-n_0} \tag{17}$$

- Kovariančna matrika vektorja popravkov neznank (za $\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}$ glej enačbi 12 in 13):

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{\Delta\Delta}} = \sigma_0^2\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}} \tag{18}$$

- Matrika kofaktorjev in kovariančna matrika vektorja popravkov:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} = \mathbf{Q} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{vv}} = \sigma_0^2\mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} \tag{19}$$

- Matrika kofaktorjev in kovariančna matrika vektorja izravnanih opazovanj:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\mathbf{vv}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Sigma}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \sigma_0^2\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} \tag{20}$$