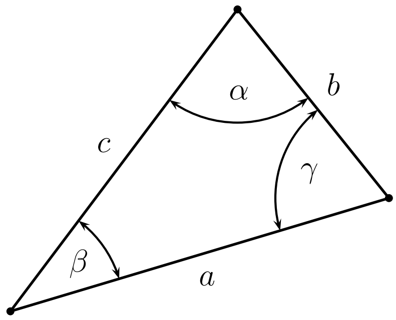
Globalni test modela in iskanje grobih pogreškov – Opazovanja v trikotniku:

V trikotniku smo izmerili vse količine in dobili tri stranice: $a = 175.527\,\mathrm{m}$, $b = 132.392\,\mathrm{m}$ in $c = 192.018\,\mathrm{m}$, ter vse tri notranje kote: $\alpha = 62°20'15''$, $\beta = 41°51'6''$ in $\gamma = 75°45'33''$. Razporeditev opazovanj v trikotniku prikazuje slika 1. Če so vse stranice izmerjene z enako natančnostjo ($\sigma_d = 5.0\,\mathrm{cm}$), če so tudi koti izmerjeni z enako natančnostjo ($\sigma_k = 1'$), po MNK izravnaj opazovanja in reši tako funkcionalni kot tudi stohastični model izravnave (za izračun natančnosti uporabi referenčno varianco a-priori). Izvedi globalni test modela ($\alpha = 0.05$) in s pregledom opazovanj, kakor tudi s τ-testom poišči morebitne grobe pogreške ($\alpha = 0.01$).



Slika 1: Skica trikotnika in opazovanj

Ker moramo v nalogi izvesti MNK, globalni test modela in poiskati morebitne grobe pogreške v izravnavi, bomo uporabili pogojno izravnavo po MNK.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Pri obravnavanem trikotniku imamo $n =$ ___ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali $n_0 =$ ___. Število nadštevilnih opazovanj je torej $r =$ ___, kar določa število pogojnih enačb. Le-te naj imajo obliko:
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} - 180° = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}\sin\hat{\beta} - \hat{b}\sin\hat{\alpha} = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{a}\sin\hat{\gamma} - \hat{c}\sin\hat{\alpha} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$
   V enačbi 1 smo izbrali vsoto notranjih kotov (1. pogojna enačba) in dva sinusna stavka (2. in 3. pogojna enačba). Vektor opazovanj zapišimo v obliki $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a & b & c & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ in tako lahko nastavimo matriko koeficientov pogojnih enačb $\mathbf{A}$ in vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$. Osnovni matrični sistem pogojne izravnave $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$ ima obliko:
$$\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Opazovanja so različne natančnosti, ki so tudi podane. Če si za referenčno varianco a-priori izberimo $\sigma_0^2 = \sigma_d^2$, torej natančnost stranic, potem bodo kofaktorji in uteži kotnih in dolžinskih opazovanj enaki:

$$\begin{aligned} q_a = q_b = q_c = \_\_\_ \qquad & q_\alpha = q_\beta = q_\gamma = \_\_\_ \\ p_a = p_b = p_c = \_\_\_ \qquad & p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = \_\_\_ \end{aligned} \tag{3}$$

3. Rešimo funkcionalni in stohastični model izravnave.
   Ko imamo nastavljen funkcionalni model izravnave (matrika $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in ko imamo nastavljen stohastični model izravnave (varianca σ_0^2 in matrika $\mathbf{Q}$), lahko rešimo pogojno izravnavo. Rešitev funkcionalnega modela predstavljata vektorja $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, medtem ko rešitev stohastičnega modela izravnave predstavjajo matriki $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Zapišimo prvo izračunano referenčno varianco $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n-n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_\_ \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_\_ \end{aligned} \tag{4}$$

   Popravke opazovanj in njihove natančnosti, če uporabimo referenčno varianco a-priori, pa prikažimo v pregledni obliki:

   Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
a	____cm	____cm	____m	____cm
b	____cm	____cm	____m	____cm
c	____cm	____cm	____m	____cm
α	____″	____″	__°__′__″	____″
β	____″	____″	__°__′__″	____″
γ	____″	____″	__°__′__″	____″

4. Globalni test modela.
   Pri globalnem testu modela moramo prvo nastaviti obe meji iz χ^2-porazdelitve. Ker imamo stopnjo značilnosti testa $\alpha = 0.05$, število prostostnih stopenj $r = \_\_\_$ in ker imamo dvostranski test, moramo dobiti:

   - spodnja meja: $\chi^2_{\alpha/2,r} = \chi^2_{\_,\_} = \_\_\_$ in
   - zgornja meja: $\chi^2_{1-\alpha/2,r} = \chi^2_{\_,\_} = \_\_\_$.

   Na osnovi zgornje in spodnje meje iz χ^2-porazdelitve porazdelitve izračunamo še zgornjo in spodnjo mejo globalnega testa. Dobimo

- spodnja meja: $\frac{\chi^2_{\alpha/2,r}}{3} = \chi^2_{\_,\_} = \_\_\_$ in
- zgornja meja: $\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,r}}{3} = \chi^2_{\_,\_} = \_\_\_$.

Izračunajmo še razmerje med referenčnima variancama:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \_\_\_ \tag{5}$$

Glede na rešitev iz enačbe 5 in na obe meji, ki sta postavljeni v zgornjih alinejah, lahko zaključimo, da referenčni varianci nista skladni, globalni test pade.

5. Iskanje grobih pogreškov s pregledom opazovanj.
   Pri iskanju grobih pogreškov na osnovi pregleda opazovanj bomo primerjali vrednost popravka vsakega opazovanja s pripadajočo natančnostjo, ki jo izračunamo na osnovi referenčne variance a-priori σ_0^2. Stopnjo značilnosti testa nastavimo na $\alpha = 0.01$ in iz preglednice normalne porazdelitve izpišemo kritično vrednost $N_{\alpha/2}$, s katero bomo testirali izračunane statistike ω. Za kritično vrednost dobimo $N_{\alpha/2} = N_{\_} = \_\_\_$. Rezultati iskanja grobih pogreškov na osnovi pregleda opazovanj so podani v spodnji pregledni obliki:

	ω	$\|\omega\|$	$\|\omega\| > N_{\alpha/2}$
v_a	____	____	____
v_b	____	____	____
v_c	____	____	____
v_α	____	____	____
v_β	____	____	____
v_γ	____	____	____

6. Iskanje grobih pogreškov s τ-testom.
   Podobno kot pri pregledu opazovanj, bomo tudi pri τ-testu primerjali vsak popravek s pripadajočo natančnostjo, le da bomo tu natančnost popravka izračunali na osnovi referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Tudi tu je stopnja značilnosti testa $\alpha = 0.01$, testna statistika T pa se porazdeljuje po τ-porazdelitvi, zato kritično mejo preberemo iz te porazdelitve. Za kritično vrednost dobimo $\tau_{r,\alpha/2} = \tau_{\_,\_} = \_\_\_$. Rezultati iskanja grobih pogreškov na osnovi τ-testa so podani v spodnji pregledni obliki:

	T	$\lvert T \rvert$	$\lvert T \rvert > \tau_{r,\alpha/2}$
v_a	____	____	____
v_b	____	____	____
v_c	____	____	____
v_α	____	____	____
v_β	____	____	____
v_γ	____	____	____