1 GLOBALNI TEST MODELA IN ISKANJE GROBIH POGREŠKOV

Metoda najmanjših kvadratov da optimalne rezultate v primeru, ko v opazovanjih ni grobih pogreškov. Kot opazovanja, ki vsebujejo grobe pogreške, si predstavljamo tista opazovanja, pri katerih bo dobljen popravek opazovanja nesorazmerno velik glede na podano natančnost opazovanja. Grobe pogreške lahko razdelimo v dve skupini. V prvi skupini so tisti pogreški, ki so rezultat neke napake v izmeri ali obdelavi podatkov. Tak primer je npr. napačno izmerjena višina signala, inštrumenta, antene GNSS, slabo centriranje nad točko in podobno. Grobi pogreški takih vrst se lahko pojavijo tudi pri modernih inštrumentih, ko izvajajo geodetske meritve. Pri inštrumentih GNSS, kjer je število opazovanj vedno veliko, se taka opazovanja hitro pojavijo. Druga vrsta grobih pogreškov pa izhajajo povsem iz slučaja. Če predpostavimo, da so opazovanja porazdeljena normalno, se bo vsake toliko časa po slučajo pojavilo opazovanje, ki bo značilno odstopalo od ostalih. Ta opazovanja teoretično niso grobo pogrešena, a imajo navzven enake lastnosti kot grobi pogreški prve skupine. Da pri obdelavi dobimo optimalne rezultate, grobe pogreške poiščemo in jih iz matematičnega modela odstranimo.

Pri iskanju grobih pogreškov imamo dve situaciji, in sicer:

- poznamo natančnosti opazovanj, kar pomeni da imamo podano variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$, iz katere lahko določimo referenčno varianco a-priori σ_0^2 in izračunamo matriko uteži $\mathbf{P}$, ali
- natančnosti opazovanj ne poznamo, kar pomeni da nimamo nobene informacije o natančnostih opazovanj ali pa poznamo le razmerja med natančnosti opazovanj (primer dolžine nivelmanskih linih pri geometričnem nivelmanu).

Če natančnosti opazovanj poznamo, v prvem koraku izvedemo **globalni test modela**, kjer primerjamo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ z referenčno varianco a-priori σ_0^2. Neskladje med obem variancama je lahko posledica prisotnosti grobih pogreškov. V drugem koraku s postopkom **pregleda opazovanj** poiščemo grobe pogreške.

V primeru, ko pa natančnosti opazovanj ne poznamo, globalnega testa seveda ne moremo izvesti. V tem primeru lahko poiščemo le grobe pogreške, a uporabimo **τ-test**.

1.1 Referenčna varianca a-posteriori in globalni test

A-posteriori vrednost referenčne variance $\hat{\sigma}_0^2$ ocenimo na podlagi izračunanih popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ in matrike uteži opazovanj $\mathbf{P}$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} \tag{1}$$

Ocena referenčne variance a-posteriori je neodvisna od izbire modela izravnave, saj je vektor popravkov enak tako za posredni, pogojni ali splošni model izravnave.

Povezava med matriko uteži opazovanj $\mathbf{P}$ in varianč no-kovarianč no matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ je enaka:

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \mathbf{\Sigma}^{-1} \tag{2}$$

V enačbi 2 je σ_0^2 referenčna varianca a-priori. Če matriko uteži $\mathbf{P}$ iz enačbe 1 nadomestimo z desno stranjo enačbe 2, dobimo:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{v}}{r} = \sigma_0^2 \frac{\Omega}{r} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{v}}{r} = \frac{\Omega}{r} \tag{3}$$

V enačbi 3 smo z Ω označili kvadratno formo $\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{v}$. Vprašanje pa se sedaj pojavi, kakšno vrednost pričakujemo za kvadratno formo Ω iz enačbe 3. Izkaže se, da velja:

$$E[\Omega] = E[\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{v}] = r \tag{4}$$

Pričakovana vrednost kvadratne forme Ω je torej enaka številu nadštevilnih opazovanj. To dejstvo niti ni tako nepričakovano, saj lahko v primeru diagonalne variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}$ kvadratno formo Ω iz enačbe 4 zapišemo kot:

$$\Omega = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{v} = \frac{v_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{v_n^2}{\sigma_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^2}{\sigma_i^2} \tag{5}$$

Ker pričakujemo, da so posamezni popravki v_i normalno porazdeljeni s srednjo vrednostjo 0 in varianco σ_i^2, imamo v enačbi 5 vsoto kvadratov n-slučajnih spremenljivk α_i $\left(\alpha_i^2 = \frac{v_i^2}{\sigma_i^2}\right)$, ki so standardizirano normalno porazdeljene (torej s srednjo vrednostjo 0 in varianco 1). Iz oblike in definicije χ^2 porazdelitve tako vidimo, da bi morala biti porazdelitev kvadratne forme Ω porazdelitev χ^2 z n prostostnimi stopnjami in pričakovano vrednostjo n (oznaka χ_n^2). Vendar pa popravki medseboj niso neodvisni, saj so pridobljeni le na podlagi r nadštevilnih opazovanj. Neodvisnih popravkov je tako samo r, ostalih n_0 popravkov je linearno odvisnih. Zato se kvadratna forma Ω porazdeljuje po χ^2 porazdelitvi z r prostostnimi stopnjami (oznaka χ_r^2) in pričakovano vrednostjo r.

Enačbo 3 tako lahko zapišemo kot:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{E[\Omega]}{r} = \frac{r}{r} = 1 \tag{6}$$

Enačba 6 prikazuje glavno značilnost referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Le-ta mora biti statistično skladna z referenčno varianco a-priori σ_0^2. Statistično skladnost med obema variancama bomo testirali s statističnim testom, kjer prvo nastavimo testno statistiko G kot:

$$G = r \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_r^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{G}{r} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \frac{\chi_r^2}{r} \tag{7}$$

Nastavimo ničelno (H_0) in alternativno (H_a) hipotezo statističnega testa:

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \qquad \text{oz.} \qquad H_a : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 \tag{8}$$

Ničelne hipoteze ne moremo zavrniti, ko glede na testno statistiko G iz enačbe 7 velja:

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2,r}}{r} < \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2,r}}{r} \tag{9}$$

V enačbi 9 predstavlja α stopnjo značilnosti (tveganja) testa. Test skladnosti obeh referenčnih varianc imenujemo tudi **globalni test modela**.V splošnem, predvsem ko je število opazovanj večje in je veliko nadštevilnih opazovanj, lahko meji grobo nastavimo kot:

$$0.6 < \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < 1.6 \tag{10}$$

Iz globalnega testa iz enačbe 9 (in tudi iz 10) vidimo, da je statistični test dvostranski. To pomeni, da želimo, da sta varianci skladni. Referenčna varianca a-posteriori naj ne bo prevelika glede na varianco a-priori, a hkrati ne sme biti tudi premajhna. Lastnost globalnega testa je tudi ta, da je **neodvisen od izbire referenčne variance a-priori**.

V primeru, ko globalni test zavrne skladnost obeh varianc, ali ko zavrnemo globalni test, iščemo vzroke zavrnitve v:

- Napačen matematičen model: Pri sestavi enačb popravkov ali pogojnih enačb naredimo napako in enačbe ne zapišemo pravilno. Lahko se pojavi tudi neustrezno modeliranje realnega stanja v enačbah (npr. zanemarimo atmosferske vplive na opazovanja in podobno − opazovanja vsebujejo poleg slučanjih tudi sistematične pogreške).
- Napačen stohastičen model: Matrika kofaktorjev opazovanj ne ustreza realnemu stanju. Razmerja med natančnostmi opazovanj niso prava. Prav tako globalni test ni sprejet, če so natančnosti opazovanj precenjene ali podcenjene.
- Grobo pogrešena opazovanja: Opazovanja poleg slučajnih pogreškov vsebujejo tudi grobe pogreške.
- Teorija motenj: V izračunu se nam zaradi nestabilnosti numeričnega sistema, zaokroževanja... pojavijo napake v izračunu

Globalni test modela uporabimo tudi zato, da se odločimo, katero referenčno varianco uporabimo za izračun kovariančnih matrik (rešitve stohastičnega modela izravnave). V primeru, ko je globalni test sprejet (varianci sta skladni) uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2. Če pa globalni test ni sprejet, potem moramo prvo analizirati, kje je problem. Če ne ugotovimo vzroka za zavrnitev globalnega testa, potem za izračun stohastičnega modela izravnave uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

1.2 Iskanje grobih pogreškov

Po opravljenem globalnem testu, neglede na rezultat, izvedemo še postopek iskanja grobih pogreškov v opazovanjih, saj se lahko zgodi, da kljub prisotnemu grobemu pogrešku ne moremo zavrniti globalnega testa. Globalni test seveda izvedemo le v primeru, ko so natančnosti opazovanj znane. Če natančnosti opazovanj ne poznamo, globalnega testa ne moremo izvesti in gremo neposredno na iskanje grobih pogreškov. Vendar pa neglede na izbran postopek iskanja grobih pogreškov, vedno analiziramo popravke opazovanj v_i $(i = \{1, 2, \ldots, n\})$.

1.2.1 Iskanje grobih pogreškov s pregledom opazovanj

Iskanje grobih pogreškov s postopkom pregleda opazovanj rečemo tudi "data snooping" ali tudi Baardova metoda, po geodetu, ki je postopek prvi definiral. V tem primeru izhajamo iz predpostavke, da so natančnosti opazovanj znane, torej da poznamo variančno-kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ in referenčno posledično referenčno varianco a-priori σ_0^2. Za vsak izračunan popravek opazovanj v_i $(i = \{1, 2, \ldots, n\})$ sestavimo testno statistiko ω_i, ki ima obliko:

$$\omega_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sigma_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} \sim N(0, 1) \tag{11}$$

Ključno pri enačbi 11 je, da natančnost popravka σ_{v_i} izračunamo na osnovi referenčne variance a-priori σ_0^2. Za testno statistiko ω_i, ki ji pravimo tudi "standardizirani popravek", velja, da se porazdeljuje po standardni normalni porazdelitvi. Sestavimo ničelno in alternativno hipotezo:

$$H_0 : \omega_i = 0 \qquad \text{oz.} \qquad H_a : \omega_i \neq 0 \tag{12}$$

Ničelne hipoteze iz enačbe 12 ne moremo zavrniti, ko velja:

$$|\omega_i| < N_{\alpha/2} \tag{13}$$

V enačbi 13 $N_{\alpha/2}$ predstavlja kritično mejo, ki jo dobimo iz porazdelitve, pri stopnji značilnosti $\alpha/2$. Iz testa tudi vidimo, da je test dvostranski, saj so popravki lahko tako negativni, kot tudi pozitivni. V praksi se je pojavila dokaj dobra meja za iskanje grobih pogreškov, in sicer, popravek verjetno pripada opazovanju, ki vsebuje grobi pogrešek, če velja:

$$|\omega_i| > 3 \tag{14}$$

Za grobo pogrešena opazovanja obravnavamo vsa tista opazovanja, katerih popravek opazovanj je po absolutni vrednosti vsaj 3-krat večji od pripadajoče natančnosti.

1.2.2 Iskanje grobih pogreškov s τ-testom

V primeru, ko natančnosti opazovanj ne poznamo, ne poznamo ne kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}$, ne referenčne variance a-priori σ_0^2. V tem primeru seveda globalnega testa ne moremo izvesti, pa tudi pregleda opazovanj ne. Tu uporabimo τ-test. Za vsak izračunan popravek opazovanj v_i $(i = \{1, 2, \ldots, n\})$ sestavimo testno statistiko T_i, ki ima obliko:

$$T_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} \sim \tau_r \tag{15}$$

Standardnizirani popravek T_i v enačbi 15 se izračuna zelo podobno, kot v enačbi 11 z eno **zelo pomembno razliko**, natančnost popravka se izračuna na osnovi referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Ker je izračun natančnosti popravka odvisen od popravkov samih (izračun $\hat{\sigma}_0^2$), se testna statistika T_i porazdeljuje po τ porazdelitvi z r prostostnimi stopnjami. Sestavimo ničelno in alternativno hipotezo:

$$H_0 : T_i = 0 \qquad \text{oz.} \qquad H_a : T_i \neq 0 \tag{16}$$

Ničelne hipoteze iz enačbe 16 ne moremo zavrniti, ko velja:

$$|T_i| < \tau_{r,\alpha/2} \tag{17}$$

1.2.3 Ocena velikosti grobega pogreška

V primeru, da grobi pogrešek s postopkom pregleda opazovanja ali τ-testa odkrijemo, lahko izračunamo njegovo velikost ∇v_i kot:

$$\nabla v_i = -\frac{v_i}{r_i} \tag{18}$$

V enačbi 18 količina r_i predstavlja nadštevilnost opazovanja, ki jo dobimo iz matrike nadštevilnosti $\mathbf{R}$, ki se izračuna kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{R} = \mathbf{I}_{n\times n} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{vv}\mathbf{P} \tag{19}$$

Matrika nadštevilnosti $\mathbf{R}$ iz enačbe 19 predstavlja povezavo med vektorjem odstopanj $\mathbf{f}$ in izračunanim vektorjem popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. $\mathbf{R}$ je kvadratna matrika, velikost $n \times n$ in prikazuje, kako se bodo odstopanja preslikala v popravke opazovanj. Posebnega pomena so diagonalni elementi matrike $\mathbf{R}$, ki jih označimo z r_i in jim rečemo **nadštevilnosti opazovanj** ($i = \{1, 2, \ldots, n\}$).

Velikost grobega pogreška iz enačbe 18 je odvisna od velikosti popravka in od nadštevilnosti r_i opazovanja, ki mu ta popravek pripada. Na iskanje grobih potreškov tako vpliva natančnost opazovanj in geometrija geodetske mreže.

1.3 Primer naloge – Dolžina med točkama merjena 10-krat

Dolžino D med dvema točkama A in B smo izmerili 10-krat in dobili:

Opazovanje	Vrednost [m]
d_1	45.519 m
d_2	45.521 m
d_3	45.526 m
d_4	45.509 m
d_5	45.509 m
d_6	45.508 m
d_7	45.525 m
d_8	45.521 m
d_9	45.520 m
d_{10}	45.508 m

Tabela 1: Seznam opazovanih 10-ih dolžin

Izravnaj opazovanja po MNK in določi izravnano dolžino D. Izvedi globalni test modela ($\alpha = 0.05$) in poišči grobe pogreške med opazovanji s postopkom pregleda opazovanj ($\alpha = 0.01$), kakor tudi s τ-testom ($\alpha = 0.01$). Izračune izvedi, če:

- je natančnost opazovanj enaka in znaša $\sigma_d = 10\,\mathrm{mm}$,
- je natančnost opazovanj enaka in znaša $\sigma_d = 2\,\mathrm{mm}$,
- je natančnost opazovanj enaka in znaša $\sigma_d = 30\,\mathrm{mm}$,
- je natančnost opazovanj enaka in znaša $\sigma_d = 10\,\mathrm{mm}$ in je opazovanje $d_4 = 45.489\,\mathrm{m}$.

1.3.1 Rešitev primera 1 ($\sigma_d = 10\,\mathrm{mm}$)

Rešitev naloge bomo pridobili s posredno izravnavo po MNK. Seveda bi enake rezultate dobili tudi, če uporabimo pogojno izravnavo ali splošni model izravnave po MNK. Rešitev posredne izravnave bomo prikazali na kratko, osredotočili se bomo na globalni test modela in iskanje grobih pogreškov.

Izhajamo iz opazovanj v preglednici 1 in sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ s pripadajočo kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_{10} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \sigma_0^2 = \sigma_d^2 \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \tag{20}$$

Sestavili bomo $n = 10$ enačb popravkov, ki se bodo za posamezne dolžine zapisale v obliki:

$$F_i \equiv \hat{d}_i - D = 0 \qquad i = \{1, 2, \ldots, 10\} \tag{21}$$

Za približno vrednost neznanke D, ki nastopajo v enačbah popravkov 21, bomo vzeli kar $D_0 = 0.0\,\mathrm{m}$. Če vse enačbe lineariziramo in jih zapišemo v osnovni matrični obliki posredne izravnave $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$, potem sta matrika $\mathbf{B}$ in vektor $\mathbf{f}$ enaka:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{1}_{10\times 1} \qquad \mathbf{f} = -\mathbf{l} \tag{22}$$

V enačbi 22 je matrika $\mathbf{B}$ enaka negativni matriki enic ($\mathbf{1}$), velikosti 10×1, vektor $\mathbf{f}$ pa kar negativnemu vektorju opazovanj iz enačbe 20. V prvem koraku rešimo funkcionalni model izravnave. Izračunamo matriko in vektor sistema normalnih enačb:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 10.0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 455.1660 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Na osnovi sistema normalnih enačb izračunamo vektor $\mathbf{\Delta}$ in vektor $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 45.5166\,\mathrm{m} \end{bmatrix} = \mathbf{x} \tag{24}$$

Izračun popravkov opazovanj bomo prikazali pri postopku iskanja grobih pogreškov, tu zapišimo le izračunano referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 5.316 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0.0073\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{25}$$

Izvedimo globalni test modela. Prvo izračunajmo razmerje med obema variancama:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{5.316 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2}{1.000 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 0.53 \tag{26}$$

Da ugotovimo, ali sta referenčni varianci iz enačbe 26 skladni, izvedimo statistični test, kakor v enačbi 9, a prvo iz preglednice χ^2-porazdelitve izpišimo spodnjo iz zgornjo mejo porazdelitve, pri prostostnih stopnjah $r = 9$ in stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$:

- $\chi^2_{\alpha/2,r} = \chi^2_{0.025,9} = 2.7004$ in

- $\chi^2_{1-\alpha/2,r} = \chi^2_{0.975,9} = 19.0228$.

Meji globalnega testa iz enačbe 9 pa sta:

- $\frac{\chi^2_{\alpha/2,r}}{9} = \frac{\chi^2_{0.025,9}}{9} = 0.3000$ in
- $\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,r}}{9} = \frac{\chi^2_{0.975,9}}{9} = 2.1136$.

Izračunani meji uporabimo za test iz enačbe 9, kjer dobimo:

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2,r}}{r} < \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2,r}}{r} \qquad \rightarrow \qquad 0.3000 < 0.53 < 2.1136 \tag{27}$$

Vidimo, da je razmerje obeh varianc iz enačbe 27 znotraj podanih meja statističnega testa, zato lahko sklepamo, da sta varianci skladni. Globalni test je sprejet. Poiščimo še morebitne grobe pogreške. V prvem koraku izvedimo pregled opazovanj, kjer za stopnjo značilnosti testa uporabimo $\alpha = 0.01$. Natančnosti popravkov (v) se izračuna na osnovi variance a-priori (glej enačbo 11), testna statistika ω pa se primerja glede na kritično vrednosti iz normalne porazdelitve $N_{\alpha/2} = N_{0.005} = 2.576$. Rezultati iskanja grobih pogreškov na osnovi pregleda opazovanj so podani v preglednici 2. Iz preglednice vidimo, da pri nobenem izmed opazovanj ne ugotovimo prisotnosti grobih pogreškov, saj testna statistika ω po absolutni vrednosti ne preseže kritične vrednosti $N_{\alpha/2} = N_{0.005} = 2.576$. In da še enkrat poudarimo, ključno pri postopku pregleda opazovanj je, da je natančnost vsakega popravka (stolpec σ_v v preglednici 2) izračunana na osnovi referenčne variance a-priori σ_0^2 (spet, glej enačbo 11).

	v	σ_v	ω	$\lvert\omega\rvert$	$\lvert\omega\rvert > N_{\alpha/2}$
v_1	−0.0024 m	0.0095 m	−0.25	0.25	ne
v_2	−0.0044 m	0.0095 m	−0.46	0.46	ne
v_3	−0.0094 m	0.0095 m	−0.99	0.99	ne
v_4	0.0076 m	0.0095 m	0.80	0.80	ne
v_5	0.0076 m	0.0095 m	0.80	0.80	ne
v_6	0.0086 m	0.0095 m	0.91	0.91	ne
v_7	−0.0084 m	0.0095 m	−0.89	0.89	ne
v_8	−0.0044 m	0.0095 m	−0.46	0.46	ne
v_9	−0.0034 m	0.0095 m	−0.36	0.36	ne
v_{10}	0.0086 m	0.0095 m	0.91	0.91	ne

Tabela 2: Rezultati iskanja grobih pogreškov s postopkom pregleda opazovanj - Primer 1

Prikažimo še iskanje grobih pogreškov na osnovi τ-testa. V tem primeru za vsak popravek sestavimo testno statistiko T_i iz enačbe 15, kjer natančnost popravka v imenovalcu izračunamo na osnovi referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Testna statistika T_i se primerja glede na kritično vrednost iz τ-porazdelitve $\tau_{r,\alpha/2} = \tau_{9,0.005} = 2.294$. Rezultati so predstavljeni v preglednici 3. Tudi tu lahko vidimo, da nismo našli nobenega grobega pogreška, saj so vse testne statistike T po svoji absolutni vrednosti manjše od kritične meje $\tau_{r,\alpha/2} = \tau_{9,0.005} = 2.294$.

	v	σ_v	T	$\lvert T\rvert$	$\lvert T\rvert > \tau_{r,\alpha/2}$
v_1	$-0.0024\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-0.35	0.35	ne
v_2	$-0.0044\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-0.64	0.64	ne
v_3	$-0.0094\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-1.36	1.36	ne
v_4	$0.0076\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	1.10	1.10	ne
v_5	$0.0076\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	1.10	1.10	ne
v_6	$0.0086\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	1.24	1.24	ne
v_7	$-0.0084\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-1.21	1.21	ne
v_8	$-0.0044\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-0.64	0.64	ne
v_9	$-0.0034\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-0.49	0.49	ne
v_{10}	$0.0086\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	1.24	1.24	ne

Tabela 3: Rezultati iskanja grobih pogreškov s τ-testom - Primer 1

1.3.2 Rešitev primera 2 ($\sigma_d = 2\,\mathrm{mm}$)

Pri primeru 2 imamo podano natančnost opazovanj kot $\sigma_d = 2\,\mathrm{mm}$. Opazovanja so enaka (isti vektor opazovanj $\mathbf{l}$ kot v enačbi 20), le natančnosti opazovanj se spremenijo (iz $\sigma_d = 10\,\mathrm{mm}$ v $\sigma_d = 2\,\mathrm{mm}$), zato bo večina rezultatov posredne izravnave enakih in bomo tu prikazali le tiste količine, ki se bodo spremenile.

Pri podatkih se spremeni natančnost opazovanj, zato je referenčna varianca a-priori σ_0^2 drugačna. Rešitev funkcionalnega modela ostane ista (glej enačbo 24), prav tako tudi izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ (glej enačbo 25). Zaradi drugačne referenčne variance a-priori, pa se spremeni vrednost globalnega testa. V tem primeru dobimo:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{5.316 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2}{4.000 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2} = 13.29 \tag{28}$$

Meji statističnega testa iz χ^2-porazdelitve in meji globalnega testa ostanega isti kot v poglavju 1.3.1, zato globalni test izvedemo z:

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2,r}}{r} < \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2,r}}{r} \qquad \rightarrow \qquad 0.3000 < 13.29 \not< 2.1136 \tag{29}$$

Iz enačbe 29 vidimo, da je razmerje varianc izven podanih meja testa, zato lahko trdimo, da varianci nista skladni. Iz velikosti popravkov opazovanj (glej preglednico 2) vidimo, da so popravki veliko **večji** kot je podana natančnost opazovanj ($\sigma_d = 2\,\mathrm{mm}$). Iz tega lahko sklepamo, da smo precenili natančnosti opazovanj. To je tudi vzrok, da globalni test ni bil sprejet. V takih primerih je potrebno ugotoviti, ali je natančnost opazovanj napačno podana, ali smo izvedli izmero slabo, da smo dobili opazovanja slabše kakovosti. V obeh primerih pa je potrebno ustrezno popraviti referenčno varianco a-priori, saj ne odraža pravega stanja natančnosti opazovanj.

Poiščimo na osnovi izračunanih rezultatov še grobe pogreške. V prvem koraku spet s postopkom pregleda opazovanj, rezultati pa so prikazani v preglednici 4. Postopek je identičen kot v prejšnjem primeru, vendar ker imamo napačne natančnosti opazovanj, so zato tudi izračunane natančnosti popravkov napačne. Kadar natančnosti opazovanj precenimo, se nam bo pri postopku iskanja grobih pogreškov na osnovi pregleda opazovanj to pokazalo s prevelikim številom odkritih grobih pogreškov.

	v	σ_v	ω	$\lvert\omega\rvert$	$\lvert\omega\rvert > N_{\alpha/2}$
v_1	$-0.0024\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	-1.26	1.26	ne
v_2	$-0.0044\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	-2.32	2.32	ne
v_3	$-0.0094\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	-4.95	4.95	**da**
v_4	$0.0076\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	4.01	4.01	**da**
v_5	$0.0076\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	4.01	4.01	**da**
v_6	$0.0086\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	4.53	4.53	**da**
v_7	$-0.0084\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	-4.43	4.43	**da**
v_8	$-0.0044\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	-2.32	2.32	ne
v_9	$-0.0034\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	-1.79	1.79	ne
v_{10}	$0.0086\,\mathrm{m}$	$0.0019\,\mathrm{m}$	4.53	4.53	**da**

Tabela 4: Rezultati iskanja grobih pogreškov s postopkom pregleda opazovanj - Primer 2

V primeru uporabe τ-testa, pa so rezultati prikazani v preglednici 5. Rezultati so enaki kot v prejšnjem primeru (glej preglednico 3), saj izhajamo iz enakih podatkov, enaki so popravki opazovanj in enake natančnosti popravkov, saj jih računamo na osnovi referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

	v	σ_v	T	$\lvert T\rvert$	$\lvert T\rvert > \tau_{r,\alpha/2}$
v_1	$-0.0024\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-0.35	0.35	ne
v_2	$-0.0044\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-0.64	0.64	ne
v_3	$-0.0094\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-1.36	1.36	ne
v_4	$0.0076\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	1.10	1.10	ne
v_5	$0.0076\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	1.10	1.10	ne
v_6	$0.0086\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	1.24	1.24	ne
v_7	$-0.0084\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-1.21	1.21	ne
v_8	$-0.0044\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-0.64	0.64	ne
v_9	$-0.0034\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	-0.49	0.49	ne
v_{10}	$0.0086\,\mathrm{m}$	$0.0069\,\mathrm{m}$	1.24	1.24	ne

Tabela 5: Rezultati iskanja grobih pogreškov s τ-testom - Primer 2

1.3.3 Rešitev primera 3 ($\sigma_d = 30\,\mathrm{mm}$)

Pri tretjem primeru nastavimo natančnost opazovanj na $\sigma_d = 30\,\mathrm{mm}$. Ker se spet spremenijo le natančnosti vseh opazovanj, bo večina rezultatov spet istih kot v primeru 1 (poglavje 1.3.1) in primeru 2 (poglavje 1.3.1). Zaradi drugačne natančnost opazovanj bo referenčna varianca a-priori σ_0^2 drugačna, kar bo vplivalo na globalni test. V tem primeru dobimo:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{5.316 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2}{9.000 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 0.06 \tag{30}$$

Meji statističnega testa iz χ^2-porazdelitve in meji globalnega testa ostanega isti kot v poglavju 1.3.1, zato globalni test izvedemo z:

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2,r}}{r} < \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2,r}}{r} \qquad \rightarrow \qquad 0.3000 \not< 0.06 < 2.1136 \tag{31}$$

Iz enačbe 31 vidimo, da je razmerje varianc izven podanih mej testa, zato lahko trdimo, da varianci nista skladni. Iz velikosti popravkov opazovanj (glej preglednico 6) vidimo, da so popravki veliko **manjši** kot je podana natančnost opazovanj ($\sigma_d = 30\,\mathrm{mm}$). Iz tega lahko sklepamo, da smo v tem primeru podcenili natančnosti opazovanj, kar je tudi vzrok, da globalni test ni bil sprejet. Sam postopek v tem primeru je enak kot v poglavju 1.3.2, potrebno je ugotoviti, kje je neskladje med podano natančnostjo opazovanj in med pridobljeno natančnostjo opazovanj zaradi izmere. Lahko je to posledica izmere ali pa smo narobe ocenili, kako kakovostno bomo izvedli izmero.

Tudi tu uporabimo pridobljene rezultate za iskanje grobih pogreškov, prvo s postopkom pregleda opazovanj, rezultati pa so prikazani v preglednici 6. Postopek je identičen kot v prejšnjem primeru, a zaradi drugačne natančnosti opazovanj dobimo napačne natančnosti popravkov. Če imamo podcenjene natančnosti neznank, ne bomo odkrili grobih pogreškov, ocenili bomo, da so opazovanja neobremenjena z grobimi pogreški. Rezultat bo, da bomo lahko za izračun neznank matematičnega modela uporabili pogrešena opazovanja.

	v	σ_v	ω	$\lvert\omega\rvert$	$\lvert\omega\rvert > N_{\alpha/2}$
v_1	$-0.0024\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	-0.08	0.08	ne
v_2	$-0.0044\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	-0.15	0.15	ne
v_3	$-0.0094\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	-0.33	0.33	ne
v_4	$0.0076\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	0.27	0.27	ne
v_5	$0.0076\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	0.27	0.27	ne
v_6	$0.0086\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	0.30	0.30	ne
v_7	$-0.0084\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	-0.30	0.30	ne
v_8	$-0.0044\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	-0.15	0.15	ne
v_9	$-0.0034\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	-0.12	0.12	ne
v_{10}	$0.0086\,\mathrm{m}$	$0.0285\,\mathrm{m}$	0.30	0.30	ne

Tabela 6: Rezultati iskanja grobih pogreškov s postopkom pregleda opazovanj - Primer 3

V primeru uporabe τ-testa, pa so rezultati prikazani v preglednici 7. Rezultati so enaki kot v prvem primeru (glej preglednico 5), saj izhajamo iz enakih podatkov. Enaki so popravki opazovanj in enake natančnosti popravkov, če jih računamo na osnovi referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

	v	σ_v	T	$\|T\|$	$\|T\| > \tau_{r,\alpha/2}$
v_1	-0.0024 m	0.0069 m	-0.35	0.35	ne
v_2	-0.0044 m	0.0069 m	-0.64	0.64	ne
v_3	-0.0094 m	0.0069 m	-1.36	1.36	ne
v_4	0.0076 m	0.0069 m	1.10	1.10	ne
v_5	0.0076 m	0.0069 m	1.10	1.10	ne
v_6	0.0086 m	0.0069 m	1.24	1.24	ne
v_7	-0.0084 m	0.0069 m	-1.21	1.21	ne
v_8	-0.0044 m	0.0069 m	-0.64	0.64	ne
v_9	-0.0034 m	0.0069 m	-0.49	0.49	ne
v_{10}	0.0086 m	0.0069 m	1.24	1.24	ne

Tabela 7: Rezultati iskanja grobih pogreškov s τ-testom - Primer 3

1.3.4 Rešitev primera 4 ($\sigma_d = 10\,\mathrm{mm}$ in $d_4 = 45.4890\,\mathrm{m}$)

V zadnjem primeru pa še prikažimo, kako bo grobi pogrešek v opazovanju d_4 vplival na rezultate. Natančnosti opazovanj so enake kot v primeru 1 ($\sigma_d = 10\,\mathrm{mm}$), a ker smo spremenili opazovanje, bomo dobili vse rezultate funkcionalnega modela drugačne. Vektor $\mathbf{\Delta}$ in vektor $\mathbf{x}$ imata v tem primeru vrednosti:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 45.5146\,\mathrm{m} \end{bmatrix} = \mathbf{x} \tag{32}$$

Če rezultate iz enačbe 32 primerjamo z rezultati neznank iz enačbe 24 v poglavju 1.3.1, vidimo, da grobi pogreški v opazovanjih vplivajo na izračunane neznanke. To je tudi ključen vzrok, zakaj moramo grobe pogreške iz opazovanj odstraniti.

Ker smo spremenili opazovanja, bomo dobili tudi drugačno referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$. Tu bosta:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 1.269 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0.0113\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{33}$$

Drugačna varianca a-posteriori pomen tudi drugačna vrednost globalnega testa. Za četrti primer za razmerje obeh varianc dobimo:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{1.269 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{1.000 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 1.27 \tag{34}$$

Meji statističnega testa iz χ^2-porazdelitve in meji globalnega testa ostanega isti kot v poglavju 1.3.1, zato globalni test izvedemo z:

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2,r}}{r} < \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2,r}}{r} \qquad \rightarrow \qquad 0.3000 < 1.27 < 2.1136 \tag{35}$$

Iz enačbe 35 vidimo, da je razmerje varianc znotraj podanih mej testa, zato lahko sklepamo, da sta varianci skladni. Ta primer je pomemben, da vidimo, da lahko globalni test sprejmeno tudi v primerih, ko imamo prisotne grobe pogreške. Globalni test torej ni ključen test pri ugotavljanju, ali imamo prisotne grobe pogreške. Zato grobe pogreške iščemo tudi v primerih, ko je globalni test sprejet.

Izvedimo postopek iskanja grobih pogreškov s postopkom pregleda opazovanj, kar prikazuje preglednica 8. Vidimo, da s pregledom opazovanj pravilno odkrijemo grobi pogrešek v opazovanju d_4. Tudi če pogledamo popravek tega opazovanja vidimo, da je bistveno večji kot pri ostalih opazovanjih.

	v	σ_v	ω	$\lvert\omega\rvert$	$\lvert\omega\rvert > N_{\alpha/2}$
v_1	-0.0044 m	0.0095 m	-0.46	0.46	ne
v_2	-0.0064 m	0.0095 m	-0.67	0.67	ne
v_3	-0.0114 m	0.0095 m	-1.20	1.20	ne
v_4	0.0256 m	0.0095 m	2.70	2.70	**da**
v_5	0.0056 m	0.0095 m	0.59	0.59	ne
v_6	0.0066 m	0.0095 m	0.70	0.70	ne
v_7	-0.0104 m	0.0095 m	-1.10	1.10	ne
v_8	-0.0064 m	0.0095 m	-0.67	0.67	ne
v_9	-0.0054 m	0.0095 m	-0.57	0.57	ne
v_{10}	0.0066 m	0.0095 m	0.70	0.70	ne

Tabela 8: Rezultati iskanja grobih pogreškov s postopkom pregleda opazovanj - Primer 4

Rezultati τ-testa so rezultati prikazani v preglednici 9. Tudi tu smo pravilno locirali grobi pogrešek. Pomembno pa je videti, kako se spremenijo natančnosti popravkov pri τ-testu v primerjavi z natančnostjo popravkov pri pregledu opazovanj (preglednica 8). Vidimo, da so natančnosti popravkov v preglednici 9 slabše, saj smo za izračun natančnosti popravka uporabili same popravke, v katerih pa nastopa tudi grobi pogrešek. Referenčna varianca a-posteriori ima zato vedno večjo vrednost kot referenčna varianca a-priori.

	v	σ_v	T	$\lvert T\rvert$	$\lvert T\rvert > \tau_{r,\alpha/2}$
v_1	-0.0044 m	0.0107 m	-0.41	0.41	ne
v_2	-0.0064 m	0.0107 m	-0.60	0.60	ne
v_3	-0.0114 m	0.0107 m	-1.07	1.07	ne
v_4	0.0256 m	0.0107 m	2.40	2.40	**da**
v_5	0.0056 m	0.0107 m	0.52	0.52	ne
v_6	0.0066 m	0.0107 m	0.62	0.62	ne
v_7	-0.0104 m	0.0107 m	-0.97	0.97	ne
v_8	-0.0064 m	0.0107 m	-0.60	0.60	ne
v_9	-0.0054 m	0.0107 m	-0.51	0.51	ne
v_{10}	0.0066 m	0.0107 m	0.62	0.62	ne

Tabela 9: Rezultati iskanja grobih pogreškov s τ-testom - Primer 4