1 SPLOŠNI MODEL IZRAVNAVE

Pri posredni in pogojni izravnavi smo videli, da v primeru nadštevilnih opazovanj le izravnava poda optimalno oceno izravnanih opazovanj in izravnanih neznank. Glede na obliko podatkov in funkcijskih zvez med opazovanji oz. neznankami smo izbrali ali pogojno metodo izravnave ali posredni model izravnave. Oba modela sta samo posebna primera modela izravnave, ki ga poimenujemo SPLOŠNI MODEL IZRAVNAVE.

1.1 Osnovne nastavitve splošnega modela izravnave

Tako kot pri vseh metodah izravnave, tudi pri splošnem modelu določimo tri količine, in sicer:

- n - število pridobljenih opazovanj,
- n_0 - minimalno število opazovanj, potrebnih za rešitev modela in
- $r = n - n_0$ - število število nadštevilnih opazovanj.

Pri posredni metodi izravnave smo nastavili točno $u = n_0$ neznank. V primeru splošnega modela izravnave pa imamo bolj proste roke, nastavimo u neznank, kjer pa velja:

$$0 \leq u \leq n_0 \tag{1}$$

Enačba 1 nam pove, da lahko nastavimo toliko neznank, kolikor jih želimo. Edini pogoj je, da število teh neznank ne sme presegati števila n_0.

Pojavi pa se vprašanje, koliko enačb moramo sestaviti. Ker vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene pogojne enačbe in ker moramo vsako uvedeno neznanko povezati z opazovanji velja, da je število sestavljenih enačb enako:

$$c = r + u \tag{2}$$

Enačba 2 pove, da pri r nadštevilnih opazovanjih, kjer uvedemo u neznank, potrebujemo za izravnavo c sestavljenih enačb.

1.2 Sestava enačb splošnega modela izravnave

Pri splošnem modelu izravnave moramo prvo nastaviti dve količini, in sicer:

- $\mathbf{l}$ - vektor opazovanj, velikosti $n \times 1$ ($\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$) s pripadajočo variančno–kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$,
- $\mathbf{x}$ - vektor neznank, velikosti $u \times 1$ ($\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \, x_2 \, \cdots \, x_u \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$).

Sestavimo c enačb, ki povezujejo vsa (izravnana) opazovanja in vse uvedene neznanke. Splošna oblika enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv f_1(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n, x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \\ F_2 &\equiv f_1(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n, x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \\ &\vdots \\ F_c &\equiv f_c(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n, x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Enačba 3 prikazuje sestavljenih c enačb, ki vsebujejo $n+u$ neznanih parametrov, in sicer vsa izravnana opazovanja in vse neznanke. Matrično lahko enačbe 3 zapišemo v obliki:

$$\mathbf{F}\left(\hat{\mathbf{l}}, \mathbf{x}\right) = \mathbf{0} \tag{4}$$

V enačbi 4 imamo na levi strani enačbe 3, na desni strani enačaja pa ničelni vektor velikosti $c \times 1$.

Numeričnih vrednosti argumenta funkcije $\mathbf{F}$ (izravnana opazovanja $\hat{\mathbf{l}}$ in neznanke $\mathbf{x}$) ne poznamo, lahko pa jih nadomestimo z:

- $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$, kjer je $\mathbf{v}$ vektor popravkov opazovanj,
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta}$, kjer je $\mathbf{x}_0$ vektor približnih vrednosti neznank in $\boldsymbol{\Delta}$ popravki približnih vrednosti neznank.

Sistem nelinearnih enačb 4 tako lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{l} + \mathbf{v}, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta}\right) = \mathbf{0} \tag{5}$$

Pričakovane vrednosti popravkov opazovanj so majhnega velikostnega reda v primerjavi z opazovanji, prav tako pričakujemo, da bodo popravki neznank majhni. Zato lahko enačbo 5 (oz. sistem c enačb) razvijemo v Taylorjevo vrsto, kjer zanemarimo vse člene drugega in višjih redov. Razvoj naredimo tako za opazovanja (približne vrednosti so opazovane vredosti $\mathbf{l}$, prirastki so popravki opazovanj $\mathbf{v}$) kot tudi za neznanke (približne vrednosti so približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$, prirastki so popravki neznank $\boldsymbol{\Delta}$). Linearizirana oblika je tako dana z:

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{l} + \mathbf{v}, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta}\right) \approx \mathbf{F}\left(\mathbf{l}, \mathbf{x}_0\right) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{l}}\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}_0}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Enačbo 6 preuredimo, da dobimo:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{l}}\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}_0}\boldsymbol{\Delta} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{l}, \mathbf{x}_0\right) \tag{7}$$

V enačbi 7 elemente označimo kot:

- $^{\partial \mathbf{F}}/_{\partial \mathbf{l}} = \mathbf{A}$ $\quad\rightarrow$ matrika koeficientov/parcialnih odvodov po opazovanjih, velikosti $c \times n$,

- $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{x}_0 = \mathbf{B}$ $\quad\rightarrow$ matrika koeficientov/parcialnih odvodov po neznankah, velikosti $c \times u$,
- $-\mathbf{F}\left(\mathbf{l}, \mathbf{x}_0\right) = \mathbf{f}$ $\quad\rightarrow$ odstopanja enačb oz. prosti členi enačb splošnega modela izravnave, velikosti $c \times 1$.

Tako lahko zapišemo končno obliko sistema lineariziranih enačb za splošni model izravnave:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f} \tag{8}$$

1.3 Rešitev matematičnega modela izravnave

Do končnih rezultatov izravnave po splošnem modelu pridem z nizom matričnih izračunov. **Prvo rešimo funkcionalni model** izravnave:

- Matrika kofaktorjev in matrika uteži ekvivalentnih opazovanj / enačb:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_e &= \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{P}_e &= \mathbf{Q}_e^{-1}\end{aligned} \tag{9}$$

- Sistem normalnih enačb:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e\mathbf{B} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e\mathbf{f}\end{aligned} \tag{10}$$

- Rešitev funkcionalnega modela:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e(\mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}) \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v}\end{aligned}$$

V drugem koraku pridobimo **rešitev stohastičnega modela**:

- Referenčna varianca a-posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} \tag{11}$$

- Matrike kofaktorjev vektorjev funkcionalnega modela:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e\right)\mathbf{A}\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv}\end{aligned} \tag{12}$$

- Variančno-kovariančne matrike ($\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$) za vse tri izračunane vektorje, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela ($\boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$), izračunamo tako, da matrike kofaktorjev iz enačbe 12 pomnožimo z ustrezno referenčno varianco σ^2, torej:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ii} = \sigma^2\mathbf{Q}_{ii} \qquad i = \{\Delta, v, \hat{l}\} \tag{13}$$

1.4 Posebna primera splošnega modela: posredna in pogojna izravnava

Prikažimo, v katerih primerih se splošni model izravnave pretvori v pogojno oziroma posredno izravnavo.

1.4.1 Pogojna izravnava

V primeru, da izberemo število neznank $u = 0$, torej ko nimamo nobene neznanke, potem nimamo vektorja $\mathbf{\Delta}$ in matrike $\mathbf{B}$. V tem primeru imamo osnovni matrični sistem v obliki:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{14}$$

Rešitev funkcionalneg modela je dana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e =& \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{P}_e =& \mathbf{Q_e}^{-1} \\ \mathbf{k} =& \mathbf{P}_e\mathbf{f} \\ \mathbf{v} =& \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{l}} =& \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{15}$$

Rešitev stohastičnega modela je dana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_e\mathbf{A}\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} \end{aligned} \tag{16}$$

1.4.2 Posredna izravnava

V primeru, ko pa izberemo točno toliko neznank, kot je število nujno potrebnih opazovanj za rešitev modela $u = n_0$ in hkrati za vsako opazovanje sestavimo svojo enačbo (popravkov), kjer opazovanje nastopa linearno v enačbi, potem dobimo posredni model izravnave. Pri posrednem modelu izravnave velja, da je $\mathbf{A}$ enotska matrika in $u = n_0$. Osnovni matrični sistem ima obliko:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f} \tag{17}$$

Rešitev funkcionalneg modela je dana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e =& \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}_e =& \mathbf{Q}_e^{-1} = \mathbf{P} \\ \mathbf{N} =& \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{t} =& \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} \\ \mathbf{\Delta} =& \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{v} =& \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{\Delta} \\ \hat{\mathbf{l}} =& \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{18}$$

Rešitev stohastičnega modela je dana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{19}$$

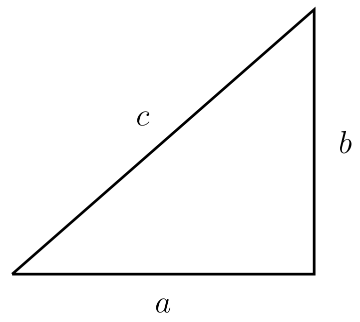
1.5 Postopek izračuna pri splošnem modelu izravnave po MNK

Pri splošnem modelu izravnave postopamo po naslednjih korakih:

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.

1.6 Primer naloge – Pravokotni trikotnik

Opazovali smo stranice v pravokotnem trikotniku in dobili: $a = 216.7\,\mathrm{m}$, $b = 163.3\,\mathrm{m}$ in $c = 271.3\,\mathrm{m}$, kot prikazuje slika 1. Dolžine smo izmerili z razdaljemerom, ki ima podano natančnost kot $\sigma_d = 2.0\,\mathrm{cm}$. S splošnim modelom izravnaj opazovanja in določi površino parcele S ter njeno natančnost σ_S. Za izračun natančnosti uporabi referenčno varianco a-priori σ_0^2.



Slika 1: Skica opazovanj v pravokotnem trikotniku

Uporabo splošnega modela izravnave na tem pravokotnem trikotniku bomo prikazali s štirimi rešitvami, in sicer:

- uvedli bomo dve neznanki, $x \simeq a$ in $y \simeq b$, a prikazali dva različna niza enačb,
- uvedli bomo eno samo neznanko, $x \simeq a$, in
- za neznanko bomo nastavili kar S.

1.6.1 Rešitev 1 – neznanki x in y in 1. niz enačb

Za rešitev bomo uporabili korake iz poglavja 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge vidimo, da imamo $n = 3$ opazovanj (a, b in c), kjer bi potrebovali samo $n_0 = 2$ opazovanj za enolično rešitev. To pomeni, da imamo $r = n - n_0 = 1$ nadštevilnih opazovanj. Ker imamo opazovanja izmerjena z enako natančnostjo, velja, da je:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad \sigma_0^2 = \sigma_d^2 = 4.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \tag{20}$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   V tem primeru si bomo izbrali $u = 2$ neznanki, in sicer x naj predstavlja stranico a, y pa stranico b, kjer jim bomo približne vrednosti nastavili iz opazovanj. Velja:
   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216.7\,\mathrm{m} \\ 163.3\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{21}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
Ker imamo $r = 1$ in $u = 2$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r+u = 1+2 = 3$. Enačbe za splošni model izravnave imajo samo eno pravilo, v vseh enačbah morajo biti vsa opazovanja in vse neznanke. Primer treh takih enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - x = 0 \\ F_2 &\equiv y - \hat{b} = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{c}^2 - x^2 - \hat{b}^2 = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

V enačbah 22 nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi obe neznanki, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
Enačbe 22 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 22 po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 20. Dobimo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial c} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial c} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2b & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -326.6 & 542.6 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 22 po obeh neznankah, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem neznank $\mathbf{x}$ iz enačbe 21. Dobimo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2x_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ -433.4 & 0.0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah 22 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_0 - a \\ b - y_0 \\ b^2 + x_0^2 - c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 22.090 \end{bmatrix} \tag{25}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
Rešitev funkcionalnega modela je predstavljena v prvem delu poglavja 1.3, kjer moramo uporabiti 7 enačb za izračun rešitve. Končni vektorji so enaki:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} -0.0163\,\mathrm{m} \\ -0.0123\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.0163\,\mathrm{m} \\ -0.0123\,\mathrm{m} \\ 0.0204\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 216.6837\,\mathrm{m} \\ 163.2877\,\mathrm{m} \\ 271.3204\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe 21 in popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 26 izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 216.6837\,\mathrm{m} \\ 163.2877\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{27}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
   Rešitev stohastičnega modela je predstavljena v drugem delu poglavja 1.3, kjer dobimo matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} 0.681 & -0.240 \\ -0.240 & 0.819 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} 0.319 & 0.240 & -0.399 \\ 0.240 & 0.181 & -0.301 \\ -0.399 & -0.301 & 0.500 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} 0.681 & -0.240 & 0.399 \\ -0.240 & 0.819 & 0.301 \\ 0.399 & 0.301 & 0.500 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

   Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 8.286 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0.029\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{29}$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
   Za izračun vseh kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2, kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} 2.724 \times 10^{-4} & -9.614 \times 10^{-5} \\ -9.614 \times 10^{-5} & 3.276 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \mathrm{m}^2 \\ \boldsymbol{\Sigma}_{vv} &= \begin{bmatrix} 1.276 \times 10^{-4} & 9.614 \times 10^{-5} & -1.597 \times 10^{-4} \\ 9.614 \times 10^{-5} & 7.245 \times 10^{-5} & -1.204 \times 10^{-4} \\ -1.597 \times 10^{-4} & -1.204 \times 10^{-4} & 2.000 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \mathrm{m}^2 \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} 2.724 \times 10^{-4} & -9.614 \times 10^{-5} & 1.597 \times 10^{-4} \\ -9.614 \times 10^{-5} & 3.276 \times 10^{-4} & 1.204 \times 10^{-4} \\ 1.597 \times 10^{-4} & 1.204 \times 10^{-4} & 2.000 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{30}$$

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
   Prvo izračunajmo natančnosti in korelacije neznank. Dobimo:

$$\sigma_x = 0.017\,\mathrm{m} \quad \sigma_y = 0.018\,\mathrm{m} \quad \rho_{xy} = -0.322 \tag{31}$$

Izračunajmo tudi natančnosti in korelacije popravkov opazovanj:

$$\begin{aligned} \sigma_{v_a} &= 0.011\,\mathrm{m} & \sigma_{v_b} &= 0.009\,\mathrm{m} & \sigma_{v_c} &= 0.014\,\mathrm{m} \\ \rho_{v_a v_b} &= 1.000 & \rho_{v_a v_c} &= -1.000 & \rho_{v_b v_c} &= -1.000 \end{aligned} \tag{32}$$

Na koncu še natančnosti in korelacije izravnanih opazovanj:

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{a}} &= 0.017\,\mathrm{m} & \sigma_{\hat{b}} &= 0.018\,\mathrm{m} & \sigma_{\hat{c}} &= 0.014\,\mathrm{m} \\ \rho_{\hat{a}\hat{b}} &= -0.322 & \rho_{\hat{a}\hat{c}} &= 0.684 & \rho_{\hat{b}\hat{c}} &= 0.470 \end{aligned} \tag{33}$$

Naloga na koncu zahteva še izračun površine S s pripadajočo natančnostjo σ_S. Uporabili bomo izravnani neznanki iz enačbe 27, kjer dobimo:

$$S = \frac{x\,y}{2} = 17\,690.90\,\mathrm{m}^2 \tag{34}$$

Natančnost površine σ_S izračunamo s pomočjo zakona o prenosu varianc in kovarianc. Izhajamo iz enačbe 34 in kovariančne matrike neznank iz enačbe 30. Za natančnost površine dobimo:

$$\sigma_S = 1.99\,\mathrm{m}^2 \tag{35}$$

1.6.2 Rešitev 2 – neznanki x in y in 2. niz enačb

Pri tej rešitvi bomo uporabili drugačne enačbe in pokazali, da to ne bo vplivalo na rezultate. V nadaljevanju tako prikazujemo le tiste podatke in rezultate, ki so drugačni kot v primeru rešitve 1 iz poglavja 1.6.1.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Povsem enako kot poglavje 1.6.1 (enačba 20).

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   Tu si izberemo enaki neznanki in jima izračunamo enaki približni vrednosti (enačba 21).

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Sestavili bomo $c = r+u = 1+2 = 3$ enačb, ki pa bodo drugačne kot so predstavljene v enačbi 22 v poglavju 1.6.1. Tu bodo enačbe oblike:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv x^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{a}^2 + y^2 - \hat{c}^2 = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

   V enačbah 36 nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi obe neznanki, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
   Matrični model sestavimo na osnovi enačb iz 36. Matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$ so:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2a & 2b & -2c \\ 0 & 2b & -2c \\ 2a & 0 & -2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 433.40 & 326.60 & -542.60 \\ 0.00 & 326.60 & -542.60 \\ 433.40 & 0.00 & -542.60 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2x_0 & 0 \\ 0 & 2y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 433.40 & 0.00 \\ 0.00 & 326.60 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f} &= \begin{bmatrix} c^2 - a^2 - b^2 \\ c^2 - x_0^2 - b^2 \\ c^2 - a^2 - y_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22.09 \\ -22.09 \\ -22.09 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektorji $\boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela imajo vrednosti:

$$
\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} -0.0163\,\mathrm{m} \\ -0.0123\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.0163\,\mathrm{m} \\ -0.0123\,\mathrm{m} \\ 0.0204\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 216.6837\,\mathrm{m} \\ 163.2877\,\mathrm{m} \\ 271.3204\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{38}
$$

   Če primerjamo vrednosti iz enačbe 26 prejšnjega poglavja 1.6.1, vidimo, da smo v enačbi 38 dobili povsem enake rezultate. Izračunajmo še neznanke $\mathbf{x}$:

$$
\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 216.6837\,\mathrm{m} \\ 163.2877\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{39}
$$

   Spet, vrednosti v 39 so popolnoma enake kot tiste iz enačbe 27.

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
   Za rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačbi 28 in 29.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
   Za rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačba 30.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
   Za rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačbe 31, 32 in 33.

Za izračun površine tudi tu uporabimo izračunani neznanki iz enačbe 39 in pripadajočo kovariančno matriko iz enačbe 30. Rezultati so identični kot v prejšnjem poglavju (glej enačbi 34 in 35).

1.6.3 Rešitev 3 – samo ena neznanka (x)

Pri tej rešitvi bomo pokazali, da lahko v funkcionalni model uvedemo tudi drugačno število neznank, kar tudi ne bo vplivalo na končne rezultate. V nadaljevanju tako prikazujemo le tiste podatke in rezultate, ki so drugačni kot v primeru rešitve 1 in 2 iz poglavij 1.6.1 in 1.6.2.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Povsem enako kot poglavje 1.6.1 (enačba 20).

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   V tem primeru bomo nastavili $u = 1$ neznanko, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216.7\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{40}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Sestavili bomo $c = r + u = 1 + 1 = 2$ enačb, torej manj enačb kot v obeh prejšnjih primerih (enačbi 22 in 36). Tu imamo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv x - \hat{a} = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

   Tudi v enačbah 41 nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi ena uvedena neznanka, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
   Matrični model sestavimo na osnovi enačb iz 41. Matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$ so manjše dimenzije kot v poglavjih 1.6.1 in 1.6.2 in imajo obliko:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2a & 2b & -2c \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 433.4 & 326.6 & -542.6 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} c^2 - a^2 - b^2 \\ a - x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22.1 \\ 0.0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{42}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektorji $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela imajo vrednosti:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} -0.0163\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.0163\,\mathrm{m} \\ -0.0123\,\mathrm{m} \\ 0.0204\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 216.6837\,\mathrm{m} \\ 163.2877\,\mathrm{m} \\ 271.3204\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Če primerjamo vrednosti iz enačb 26 in 38 poglavij 1.6.1 in 1.6.2, vidimo, da dobimo povsem enake rezultate. Izračunajmo še neznanko $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \left[\ 216.6837\,\mathrm{m}\ \right] \tag{44}$$

Spet, vrednosti v 44 je neznanka x izračunana popolnoma enako kot v poglavju 1.6.1 ali 1.6.2.

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
   Ker imamo samo eno neznanko, je matrika $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ enaka:
   $$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \left[\ 0.681\ \right] \tag{45}$$
   Za matriki $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ glej poglavje 1.6.1, enačbi 28 in 29.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
   Kovariančna matrika neznank $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ ima samo en element, to je varianco σ_x^2 in ima vrednost:
   $$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \left[\ 2.724 \times 10^{-4}\ \right] \mathrm{m}^2 \tag{46}$$
   Za matriki $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ glej poglavje 1.6.1, enačba 30.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
   Natančnost neznanke je $\sigma_x = 0.017\,\mathrm{m}$. *Za ostale rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačbi 32 in 33.*

Ker imamo tu izračunano le eno neznanko (x), bomo za izračun površine uporabili izravnana opazovanja iz vektorja $\hat{\mathbf{l}}$ iz enačbe 43, kjer dobimo:

$$S = \frac{\hat{a}\,\hat{b}}{2} = 17\,690.90\,\mathrm{m}^2 \tag{47}$$

Za izračun natančnosti površine σ_S bomo seveda uporabili zakon o prenosu varianc, le da tu izhajamo iz kovariančne matrike izravnanih opazovanj $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$. Na koncu dobimo:

$$\sigma_S = 1.99\,\mathrm{m}^2 \tag{48}$$

Rezultat iz 48 tudi v tem primeru povsem enak kot pri ostalih dveh rešitvah (enačba 35).

1.6.4 Rešitev 4 – samo ena neznanka, površina trikotnika S

Na koncu uporabimo za neznanko še iskano količino, in sicer površino trikotnika S in pokažimo, da vrsta neznanke ne vpliva na rezultate.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Povsem enako kot poglavje 1.6.1 (enačba 20).

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   V tem primeru bomo nastavili $u = 1$ neznanko, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ab}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17\,693.6\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{49}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Sestavili bomo $c = r + u = 1 + 1 = 2$ enačb, v katerih bomo povezali vsa tri opazovanja in neznanko, površino S:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{c}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}\hat{b} - 2S = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

   Tudi v enačbah 50 nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi ena uvedena neznanka, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
   Matrični model tudi tu sestavimo na osnovi enačb iz 50 in za matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$ dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2a & 2b & -2c \\ b & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 433.4 & 326.6 & -542.6 \\ 163.3 & 216.7 & 0.0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -2.0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f} &= \begin{bmatrix} c^2 - a^2 - b^2 \\ 2S_0 - ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22.1 \\ 0.0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{51}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektorji $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela imajo vrednosti:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} -2.6547\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.0163\,\mathrm{m} \\ -0.0123\,\mathrm{m} \\ 0.0204\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} 216.6837\,\mathrm{m} \\ 163.2877\,\mathrm{m} \\ 271.3204\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{52}$$

   Vektor $\mathbf{\Delta}$ se nanaša na površino trikotnika, zato njegove vrednosti ne moremo primerjati z vektorji $\mathbf{\Delta}$ iz prejšnjih treh primerov. Lahko pa primerjamo oba ostala vektorja, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, ki tudi tu dobita enake vrednosti kot v poglavju 1.6.1. Izračunajmo še neznanko $\mathbf{x}$, torej površino S:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 17\,690.9\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{53}$$

   Površino S iz enačbe 53 pa lahko primerjamo z izračunano površino iz poglavja 1.6.1 (enačba 34), kjer ugotovimo, da dobimo povsem enako vrednost.

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
   Ker imamo samo eno neznanko, je matrika $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ enaka:
   $$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \left[\begin{array}{c} 9901.031 \end{array}\right] \tag{54}$$
   Za matriki $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ glej poglavje 1.6.1, enačbi 28 in 29.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
   Kovariančna matrika neznank $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ ima samo en element, to je varianco σ_S^2 in ima vrednost:
   $$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \left[\begin{array}{c} 3.960 \end{array}\right] \mathrm{m}^2 \tag{55}$$
   Za matriki $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ glej poglavje 1.6.1, enačba 30.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
   Izračunali bomo natančnost neznanke, to je $\sigma_S = 1.99\,\mathrm{m}$, kjer dobimo enako vrednost kot v primeru enačbe 35. *Za ostale rešitve glej v poglavje 1.6.1, enačbi 32 in 33.*