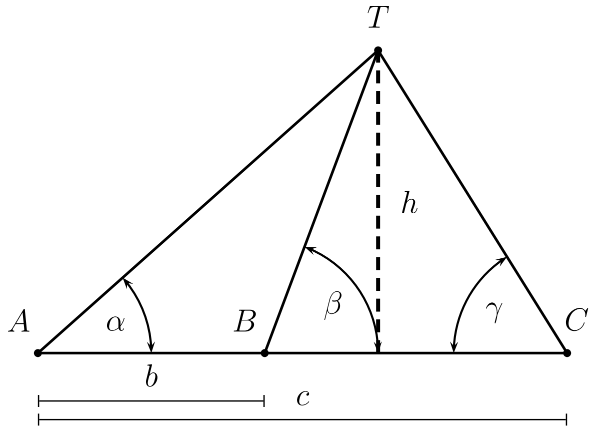
Splošni model izravnave – Višina točke T:

V ravnini imamo tri točke, ki ležijo na premici, in sicer A, B in C. Točka B je od točke A oddaljena za $b = 40.00\,\mathrm{m}$, točka C pa za $c = 110.00\,\mathrm{m}$. Določiti želimo višino točke T (oddaljenost od premice), zato smo izmerili tri kote, na točki A kot $\alpha = 37°39'$, na točki B kot $\beta = 64°57'$ in na točki C kot $\gamma = 45°28'$, kot to prikazuje slika 1. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnave po MNK izravnajte opazovanja, izračunajte višino h točke T in njeno natančnost σ_h.



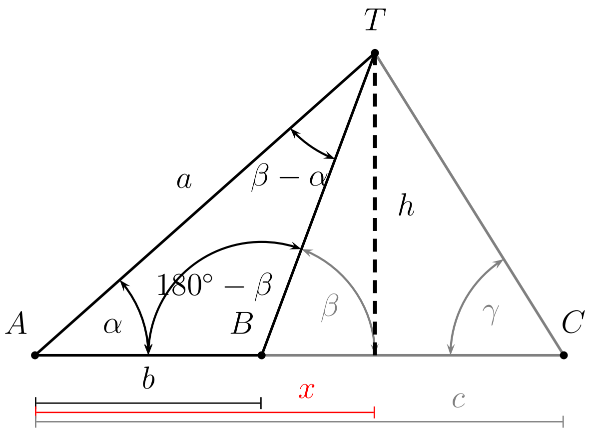
Slika 1: Opazovani koti za določitev višine točke T

Da rešimo nalogo, si bomo pomagali z nalogo iz datoteke *Naloga7_HzMKoti.pdf*, saj imamo zelo podobno nalogo. Tam smo iskali koordinati y_T in x_T, tu pa iščemo samo višino h, ki pa je po geometriji identična koordinati y_T.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Da bi določili višino h smo izmerili $n =$ ___ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali le $n_0 =$ ___ opazovanj, zato imamo $r =$ ___ nadštevilnih opazovanj. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriki $\mathbf{Q}$ ter $\mathbf{P}$, pri tem, da so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \tag{1}$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   Izbrali si bomo eno samo neznanko in to naj bo iskana višina h. Na ta način $u =$ ___ in je vektor $\mathbf{x}$ enak:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h \end{bmatrix} \tag{2}$$

   Pri izračunu približne vrednosti neznanke si tudi tu pomagamo z zunanjim urezom, uporabili pa bomo količine iz slike 2.



Slika 2: Določitev približne višine h na osnovi enačb zunanjega ureza

V prvem koraku izračunamo kot na točki T, ki je enak $\beta - \alpha$, nato pa s sinusnim izrekom izračunamo stranico a, pri tem, da izhajamo iz znane dolžine d_{AB}. Dobimo:

$$a = b\frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = \underline{\qquad}\text{m} \tag{3}$$

Za izračun približne vrednosti neznank merjen kot α in dolžino a iz enačbe 3:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\qquad}\text{m} \end{bmatrix} \tag{4}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Ker imamo $r = \underline{\quad}$ in $u = \underline{\quad}$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = \underline{\quad}$. Tudi tu bomo izhajali iz pravokotnih trikotnikov, ki jih tvori točka T s točkami i ($i = \{A, B, C\}$), pri tem, da si bomo pomagali s stranico x, kot je prikazana na sliki 2. Iz slike vidimo, da velja:

$$\begin{aligned} \frac{x}{h} &= \cot\alpha & \rightarrow \quad x &= h\cot\alpha \\ \frac{x-b}{h} &= \cot\beta & \rightarrow \quad x &= h\cot\beta + b \\ \frac{c-x}{h} &= \cot\gamma & \rightarrow \quad x &= c - h\cot\gamma \end{aligned} \tag{5}$$

   Ker imamo samo eno neznanko, to je višina h, moramo iz enačb 5 izločiti količino x. To storimo tako, da desno stran prve enačbe vstavimo namesto x v drugi in tretji enačbi. Ko dobljeni dve enačbi preuredimo, dobimo

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv h(\cot\hat{\alpha} - \cot\hat{\beta}) - b = 0 \\ F_2 &\equiv h(\cot\hat{\alpha} + \cot\hat{\gamma}) - c = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

   Enačbi 6 sta dve, kot je tudi število enačb, ki jih moramo sestaviti. Po drugi strani, v obeh enačbah nastopajo vsa tri opazovanja in neznanka. Enačbi sta torej pravilno sestavljeni in jih lahko uporabimo pri splošnem modelu izravnave.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
   Enačbi 6 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 6 po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1. Dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

   Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 6 po višini h:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial h} \\ \frac{\partial F_2}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

   Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah 6 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
   Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$. Prikažimo tu le vektor $\mathbf{\Delta}$ in izravnano višino h:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{10}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
   Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, kjer bomo referenčni standardni odklon $\hat{\sigma}_0$ zapisali v ločnih sekundah, saj so opazovanja sami koti:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_\_ \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_\_'' \end{aligned} \tag{11}$$

   Rešitev stohastičnega modela bomo prikazali v alijeni natančnosti vseh izračunanih rezultatov.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
   Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2. Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
   Za izračun natančnosti σ_h višine h korenimo kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ in dobimo:

$$\sigma_h = \_\_\_\_ \text{mm} \tag{12}$$

   Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
α	____″	____″	__° __′ __″	____″
β	____″	____″	__° __′ __″	____″
γ	____″	____″	__° __′ __″	____″

Primerjajmo rezultate te naloge z rezultati iz datoteke *Naloga7_HzMKoti.pdf*. Ugotovimo lahko, da dobimo povsem enake rezultat, če tu označimo višino h s koordinato y_T. Vzrok je v tem, da imamo popolnoma enak matematični model, le da smo tu namesto dveh neznank (h in x) v matematični model uvedli le eno (h).