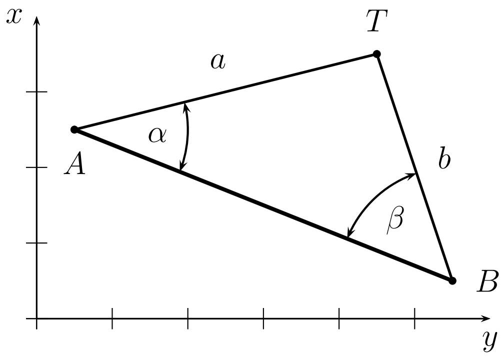
Splošni model izravnave – Ravninska geodetska mreža:

V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (5.00\,\mathrm{m}, 10.00\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (20.00\,\mathrm{m}, 0.00\,\mathrm{m})$. Da bi določili položaj točke T, smo s točke A opazovali dolžino $a = 16.2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0.1\,\mathrm{m}$) in kot $\alpha = 45^\circ$ ($\sigma_\alpha = 30'$), s točke B pa dolžino $b = 13.2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_b = 0.1\,\mathrm{m}$) in kot $\beta = 60^\circ$ ($\sigma_\beta = 30'$), kot to prikazuje slika 1. S splošnim modelom izravnave po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj koordinate točke $T(y_T, x_T)$, natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Izračunajte tudi parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki T. Uporabite referenčno varianco a-priori σ_0^2.



Slika 1: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja točke T

Nalogo smo rešili v okviru poglavja zakona o prenosu varianc in kovarianc pri MNK (glej datoteko *Naloga5_HZMreza.pdf*, kjer smo prikazali pogojno izravnavo po MNK. Tu podajamo rešitev s splošnim modelom izravnave

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Da bi določili koordinate točke T smo izmerili $n =$ ___ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali le $n_0 =$ ___ opazovanj, zato imamo $r =$ ___ nadštevilnih opazovanj. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in pripadajoča kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ sta:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ b \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Če nastavimo za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$, bodo kofaktorji in uteži opazovanj enaki:

$$\begin{aligned} q_a = q_b &= \_\_\_\_ \qquad & q_\alpha = q_\beta &= \_\_\_\_ \\ p_a = p_b &= \_\_\_\_ \qquad & p_\alpha = p_\beta &= \_\_\_\_ \end{aligned} \tag{2}$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   Za neznanki si izberemo koordinati točke T, torej y_T in x_T in na ta način definiramo vektor neznank $\mathbf{x}$ in s tem $u =$ ___. Iz opazovanj izračunamo približne vrednosti neznank in dobimo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A + a\sin(\nu_A^B - \alpha) \\ x_A + a\cos(\nu_A^B - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\,\mathrm{m} \\ \_\_\_\_\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{3}$$

V enačbi 3 je smerni kot $\nu_A^B =$ _____$^\circ$_____$'$_____$''$.

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Ker imamo $r =$ ___ in $u =$ ___, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u =$ ___. Sestavljene enačbe so:

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{a}\sin\hat{\alpha} - \hat{b}\sin\hat{\beta} = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - D^2 \\
F_3 &\equiv \hat{a}^2 - (y_T - y_A)^2 - (x_T - x_A)^2 = 0 \\
F_4 &\equiv \hat{b}^2 - (y_T - y_B)^2 - (x_T - x_B)^2 = 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
   Enačbe 4 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 4 po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1. Dobimo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \\
\frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \\
\frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \\
\frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial b} & \frac{\partial F_4}{\partial \beta}
\end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}
\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\
\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\
\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\
\_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_
\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 4 po obeh neznankah, koordinatah y_T in x_T:

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial y_T} & \frac{\partial F_1}{\partial x_T} \\
\frac{\partial F_2}{\partial y_T} & \frac{\partial F_2}{\partial x_T} \\
\frac{\partial F_3}{\partial y_T} & \frac{\partial F_3}{\partial x_T} \\
\frac{\partial F_4}{\partial y_T} & \frac{\partial F_4}{\partial x_T}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}
$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah 4 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$
\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m}^2 \\ \_\_\mathrm{m}^2 \\ \_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{7}
$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$. Prikažimo tu le vektor $\mathbf{\Delta}$ in vektor končnih koordinat točke T:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{8}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
Prikažimo samo izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_\_\_\mathrm{m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_\_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{9}$$

Rešitev stohastičnega modela bomo prikazali v alijeni natančnosti vseh izračunanih rezultatov.

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2. Numerične vrednosti natančnosti pa podamo v naslednji alineji.

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
Da dobimo natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} izračunanih koordinat točke T, korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ pa dobimo iz izvendiagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{y_T} = \_\_\_\_\mathrm{cm} \qquad \sigma_{x_T} = \_\_\_\_\mathrm{cm} \qquad \rho_{y_T x_T} = \_\_\_\_ \tag{10}$$

Izračunajmo še parametre 95% absolutne elipse pogreškov na točki T:

$$a = \_\_\_\_\mathrm{cm} \qquad b = \_\_\_\_\mathrm{cm} \qquad \theta = \_\_\_\_^\circ \tag{11}$$

Prikažimo še popravke opazovanj in izravnana opazovanja s pripadajočimi natančnostmi v pregledni obliki:

Opaz.	v	σ_v	$\hat{l}$	$\sigma_{\hat{l}}$
a	____cm	____cm	____m	____cm
b	____cm	____cm	____m	____cm
α	____′	____′	__° __′	____′
β	____′	____′	__° __′	____′