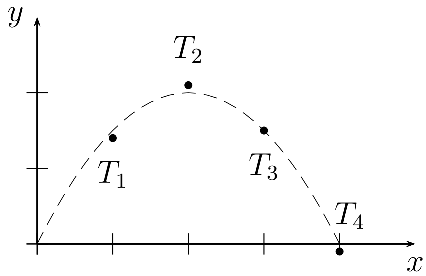
Splošni model izravnave – Točke na paraboli:

V ravnini smo izmerili koordinate x in y štirim točkam in dobili: $T_1(1, 1.4)$, $T_2(2, 2.1)$, $T_3(3, 1.5)$ in $T_4(4, -0.1)$. Če so koordinate y izmerjene dvakrat bolj natančnost kot koordinate x, s splošnim modelom izravnavo po MNK določite parametre parabole tako, da gre parabola skozi izhodišče koordinatnega sistema in se optimalno prilega točkam.



Slika 1: Točke v ravnini, ki ležijo na paraboli

Da pridemo do rešitve te naloge, bomo uporabili postopek splošnega modela izravnave (datoteka *SplosniModelIzravnave.pdf*), ker pa je naloga zelo podobna nalogi, ko smo točkam v ravnini ocenjevali parametre optimalne premice, bomo izhajali tudi iz te naloge (datoteka *Naloga2_Premica_Resitev.pdf*).

Tako kot smo tudi pri premici prvo analzirali, koliko je minimalno število opazovanj, ki jih potrebujemo za izračun parametrov parabole. Na voljo imamo $n =$ ___ opazovanj, saj imamo opazovane tako 4 koordinate x kot tudi 4 koordinate y. Enačba parabole, ki gre skozi središče ima obliko $y = ax^2 + bx$, kar bomo seveda uporabili pri sestavi enačb splošnega modela izravnave. Vidimo, da moramo uvesti dve neznanki, ki se nanašata na parabolo (a in b). Če gledamo analogijo z nalogo s premico, bi enačbo parabole pri posredni izravnavni lahko uporabili le za opazovane koordinate y, kjer pa na desni strani ne sme biti opazovanj koordinat x. Zato bi pri posredni izravnavi morali tudi tu za vsako merjeno koordinato x uvesti eno novo neznanko (p_1, p_2, p_3, p_4). Zato je pri tej nalogi število nadštevilnih opazovanj enako:

$$u = \underbrace{2}_{a,b} + \underbrace{4}_{p_1,p_2,p_3,p_4} = 6 \tag{1}$$

Sedaj lahko postopamo po korakih splošnega modela izravnave. Rezultate pa bomo predstavili na sledeč način. V prvem delu bodo nastavljeni vsi podatki za izračun rezultatov. Nato pa bomo izvedli nekaj iteracij izravnave in prikazali rezultate po opravljenih iteracijah.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz podatkov je razvidno, da je število opazovanj enako $n =$ ___, in vektor opazovanj

nastavimo kot:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

Ker so koordinate y opazovane dvakrat bolj natančno, potem za vsako točko lahko nastavimo kofaktorja opazovanj:

$$q_{x_i} = \_\_ \qquad q_{y_i} = 1 \qquad 1 = \{1, 2, 3, 4\} \tag{3}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}$ dobimo kot $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$.

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   Za neznanki nastavimo parametra parabole a in b, kjer jima približno vrednost nastavimo kot:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Ker imamo $r = \_\_$ in $u = \_\_$, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u = \_\_$. Vidimo, da tudi v tem primeru za vsako izmerjeno točko sestavimo eno enačbo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - a\hat{x}_1^2 - b\hat{x}_1 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - a\hat{x}_2^2 - b\hat{x}_2 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - a\hat{x}_3^2 - b\hat{x}_3 = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{y}_4 - a\hat{x}_4^2 - b\hat{x}_4 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
   Enačbe 5 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ je velikosti $c \times n = \_\_ \times \_\_$, matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $c \times u = \_\_ \times \_\_$ in vektor $\mathbf{f}$ je velikosti $c \times 1 = \_\_ \times 1$. Matriko $\mathbf{A}$ dobimo

z odvajanjem vseh enačbi iz 5 po vseh opazovanjih iz 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} & \frac{\partial F_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} & \frac{\partial F_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} & \frac{\partial F_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_1} & \frac{\partial F_4}{\partial y_1} & \frac{\partial F_4}{\partial x_2} & \frac{\partial F_4}{\partial y_2} & \frac{\partial F_4}{\partial x_3} & \frac{\partial F_4}{\partial y_3} & \frac{\partial F_4}{\partial x_4} & \frac{\partial F_4}{\partial y_4} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 5 po obeh neznankah, torej:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo iz enačb 5, da le-te prenesemo na desno stran in uporabimo približne vrednosti neznank in merjena opazovanja. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
   V prvem koraku izračunamo vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$, ki ga prištejemo vektorju približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ in dobimo vektor končnih vrednosti neznank $\mathbf{x}$. Sedaj pa za približne vrednosti ($\mathbf{x}_0$) privzamemo izravnane vrednosti ($\mathbf{x}$) in postopek ponovimo. Dobljeni rezultati predstavljajo rezultate 2. iteracije. Postopek ponavljamo vse dokler npr. $||\mathbf{\Delta}|| > 1 \times 10^{-6}$. Rešitve vektorja $\mathbf{\Delta}$ so:

   Iteracija 1: $\delta a = -0.514\,516$ $\quad \delta b = 2.038\,387$ $\quad ||\mathbf{\Delta}|| = 2.10$

   Iteracija 2: $\delta a = -0.011\,549$ $\quad \delta b = 0.049\,690$ $\quad ||\mathbf{\Delta}|| = 5.10 \times 10^{-2}$

   Iteracija 3: $\delta a = -0.000\,331$ $\quad \delta b = 0.001\,138$ $\quad ||\mathbf{\Delta}|| = 1.19 \times 10^{-3}$

   Iteracija 4: $\delta a = -0.000\,002$ $\quad \delta b = 0.000\,012$ $\quad ||\mathbf{\Delta}|| = 1.24 \times 10^{-5}$

   Iteracija 5: $\delta a = -0.000\,000$ $\quad \delta b = 0.000\,000$ $\quad ||\mathbf{\Delta}|| = 5.17 \times 10^{-7}$

   Vidimo, da smo morali izvesti 5 iteracij, da sta popravka obeh neznank (δs in δb) zanemarljivo majhna, da lahko končamo iterativni postopek. Vzrok za nujno obdelavo v več iteracijah je v tem, da so enačbe iz 5 nelinearne, saj vsebujejo produkte in kvadrate opazovanj in neznank. Končni rezultat, to sta ocenjena parametra premice a in b, lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

6. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
   Za izračun vseh kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, prikažimo pa le kovariančno matriko neznank:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

7. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
   Prikažimo natančnosti in korelacijo med obema neznankama:

$$\sigma_a = \_\_ \quad \sigma_b = \_\_ \quad \rho_{ab} = \_\_ \tag{11}$$