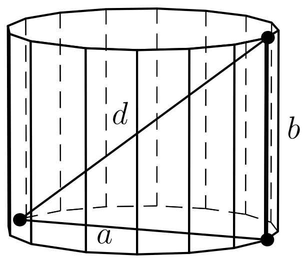
Splošni model izravnave – Opazovanja v valju:

V valju smo izmerili tri količine (glej sliko 1): premer osnovne ploskve $a = 10.0$m, višino $b = 20.0$m in prostorsko diagonalo $d = 22.0$m. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj, koliko litrov soka (beri piva) bi lahko pretočili v valj. Izračunajte tudi natančnost določitve količine soka.



Slika 1: Skica valja in opazovanj

Rešitev dobimo s postopkom splošnega modela izravnave, ki je opisan v datoteki *SplosniModelIzravnave.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge vidimo, da imamo $n =$ ___ opazovanj (a, b in d) v valju, kjer geometrijo lahko prikažemo v pravokotnem trikotniku. Nujno bi potrebovali samo $n_0 =$ ___ opazovanj, to pomeni, da imamo $r = n - n_0 =$ ___ nadštevilnih opazovanj. Ker imamo opazovanja izmerjena z enako natančnostjo, velja, da je:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \tag{1}$$

2. Izberemo si neznanke (u) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   V tem primeru si bomo izbrali $u = 1$ neznanko, in sicer točno tisto, po čemer nas sprašuje naloga, neznanka naj bo torej prostornina valja V. Njeno približno vrednost bomo izračunali iz opazovanj, zato je:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} V \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi a^2 b}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\qquad}\mathrm{m}^3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Ker imamo $r =$ ___ in $u =$ ___, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti, enako $c = r + u =$ ___. Enačbe za splošni model izravnave imajo samo eno pravilo, v

vseh enačbah morajo biti vsa opazovanja in vse neznanke. V našem primeru bomo sestavili:

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv \pi \hat{a}^2 \hat{b} - 4V = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{d}^2
\end{aligned}
\tag{3}
$$

V enačbah 3 nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi neznanka, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
Enačbe 3 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 3 po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1. Dobimo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial d} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial d} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 3 po neznanki, prostornini V:

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial V} \\ \frac{\partial F_2}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix}
\tag{5}
$$

Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah 3 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$
\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^3 \\ \_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix}
\tag{6}
$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, kjer dobimo:

$$
\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix}
\tag{7}
$$

Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe 2 in popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe 7 izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$
\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m}^3 \end{bmatrix}
\tag{8}
$$

Če izravnano prostornino V iz enačbe 8 zapišemo v litrih, pa dobimo $V =$ ____l

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
   Rešitev stohastičnega modela pomeni izračunati matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} \_\_ \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{vv} &= \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9}
$$

   Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_\_\mathrm{m}^2 \\
\hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_\_\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{10}
$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
   Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, prikažimo pa le kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$:

$$
\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\mathrm{m}^6 \end{bmatrix} \tag{11}
$$

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
   Izračunajmo natančnost prostornine valja σ_V:

$$
\sigma_V = \_\_\_\_\mathrm{m}^3 = \_\_\_\_\mathrm{l} \tag{12}
$$

   Izračunajmo tudi natančnosti popravkov opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$
\sigma_{v_a} = \_\_\_\_\mathrm{m} \quad \sigma_{v_b} = \_\_\_\_\mathrm{m} \quad \sigma_{v_d} = \_\_\_\_\mathrm{m} \tag{13}
$$

   Na koncu še natančnosti izravnanih opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$
\sigma_{\hat{a}} = \_\_\_\_\mathrm{m} \quad \sigma_{\hat{b}} = \_\_\_\_\mathrm{m} \quad \sigma_{\hat{d}} = \_\_\_\_\mathrm{m} \tag{14}
$$

Primerjajte rezultate te naloge z rezultati posredne izravnave (glej primer pri posredni izravnavi lansko leto). Dobimo malo drugačne rezultate, a so razlike veliko manjše kot je ocenjena natančnost rezultatov. Pojavijo pa se zaradi linearizacije nelinearnih enačb v osnovni matrični model tako splošnega kot tudi posrednega modela izravnave po MNK.