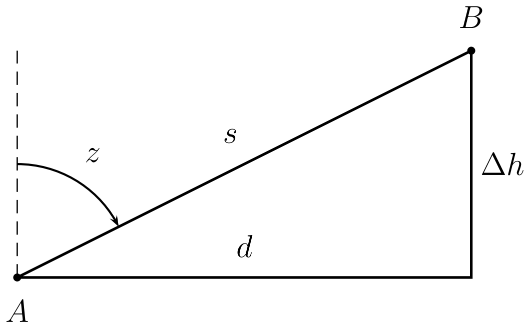
# Splošni model izravnave – Višina reperja $B$:

Dano imamo višino izhodiščnega reperja $A$, in sicer $H_A = 320.000\,\text{m}$. Da bi določili višino reperja $B$ smo s trigonometričnim višinomerstvom opazovali poševno dolžino $s = 51.0\,\text{m}$ in zenitno razdaljo $z = 78°40'$, z geometričnim nivelmanom višinsko razliko $\Delta h = 10.0\,\text{m}$, izmerili pa smo tudi horizontalno dolžino $d = 50.0\,\text{m}$, kot to prikazuje slika 1. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s splošnim modelom izravnave izravnaj opazovanja in določi višino reperja $B$ s pripadajočo natančnostjo $\sigma_{H_B}$.




Slika 1: Prikaz izmerjenih opazovanj za določitev višine reperja $B$

Rešitev bomo dobili po korakih, ki so predstavljeni v dokumentu *SplosniModelIzravnave.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo $n$, $n_0$ in $r$.
   Iz naloge vidimo, da imamo $n =$ ___ opazovanj ($s$, $d$, $\Delta h$ in $z$) v pravokotnem trikotniku, kjer bi potrebovali samo $n_0 =$ ___ opazovanj za enolično rešitev. To pomeni, da imamo $r = n - n_0 =$ ___ nadštevilnih opazovanj. Ker imamo opazovanja izmerjena z enako natančnostjo, velja, da je:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} s \\ d \\ \Delta h \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{P} = \mathbf{I} \tag{1}$$

2. Izberemo si neznanke ($u$) in jih uvedemo v funkcionalni model, sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$ in izračunamo približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$.
   V tem primeru si bomo izbrali $u = 1$ neznanko, in sicer točno tisto, po čemer nas sprašuje naloga, neznanka naj bo višina $H_B$. Njeno približno vrednost bomo izračunali iz opazovanj, zato je:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_B \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} H_{B,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_A + \Delta h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\qquad}\text{m} \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. Sestavimo $c = r + u$ enačb splošnega modela izravnave, v katerih povežemo opazovanja z neznankami.
   Ker imamo $r =$ ___ in $u =$ ___, potem je število enačb, ki jih moramo sestaviti,

enako $c = r + u =$ ___. Enačbe za splošni model izravnave imajo samo eno pravilo, v vseh enačbah morajo biti vsa opazovanja in vse neznanke. V našem primeru bomo sestavili:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \Delta\hat{h}^2 + \hat{d}^2 - \hat{s}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv H_B - \Delta\hat{h} - H_A = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d} - \hat{s}\sin\hat{z} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

V enačbah 3 nastopajo vsa tri opazovanja, kot tudi neznanka, zato je ta niz enačb pravilen.

4. Lineariziramo sestavljene enačbe in jih zapišemo v osnovni matrični obliki splošnega modela izravnave $\mathbf{Av} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
   Enačbe 3 lineariziramo tako, da izračunamo obe matriki parcialnih odvodov, $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, in vektor odstopanj $\mathbf{f}$. Matrika $\mathbf{A}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 3 po vseh opazovanjih, kjer je vrstni red odvodov podan z vektorjem opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1. Dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s} & \frac{\partial F_1}{\partial d} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial s} & \frac{\partial F_2}{\partial d} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial s} & \frac{\partial F_3}{\partial d} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta h} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

   Matrika $\mathbf{B}$ predstavlja parcialne odvode vseh enačb iz 3 po neznanki, višini $H_B$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial H_B} \\ \frac{\partial F_2}{\partial H_B} \\ \frac{\partial F_3}{\partial H_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{5}$$

   Vektor odstopanj $\mathbf{f}$ dobimo enako kot pri pogojni ali posredni izravnavi po MNK. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja v enačbah 3 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti in namesto neznank uporabimo njihove približne vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

5. Rešimo funkcionalni model izravnave, kjer izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
   Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun vektorjev $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$, kjer dobimo:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\text{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

V enačbi 7 je popravek $v_z$ izračunan v radianih, njegova vrednost v ločnih minutah pa je $v_z =$ ___$'$. Tudi izravnana zenitna razdalja $\hat{z}$ je v enačbi 7 podana v radianih, v ločnih enotah pa je enaka $\hat{z} =$ ___$^\circ$___$'$.

Na osnovi približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ iz enačbe 2 in popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 7 izračunamo končne vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{8}$$

6. Rešimo stohastični model izravnave, kjer izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ ter referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
Rešitev stohastičnega modela pomeni izračunati matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_ \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}\end{gathered} \tag{9}$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ in dobimo:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \_\_\_\mathrm{m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \_\_\_\mathrm{m}\end{aligned} \tag{10}$$

7. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
Pri izračunu kovariančnih matrik uporabimo referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, prikažimo pa le kovariančno matriko neznank $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

8. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije. Po potrebi računamo tudi parametre elips pogreškov.
Izračunajmo natančnosti neznanke, $\sigma_{H_B}$:

$$\sigma_{H_B} = \_\_\_\_\mathrm{m} \tag{12}$$

Izračunajmo tudi natančnosti popravkov opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$\sigma_{v_s} = \_\_\_\_\mathrm{m} \quad \sigma_{v_d} = \_\_\_\_\mathrm{m} \quad \sigma_{v_{\Delta h}} = \_\_\_\_\mathrm{m} \qquad \sigma_{v_z} = \_\_' \tag{13}$$

Na koncu še natančnosti izravnanih opazovanj (korelacije izračunajte sami):

$$\sigma_{\hat{s}} = \underline{\hspace{2em}}\mathrm{m} \quad \sigma_{\hat{d}} = \underline{\hspace{2em}}\mathrm{m} \quad \sigma_{\Delta\hat{h}} = \underline{\hspace{2em}}\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{z}} = \underline{\hspace{1em}}' \tag{14}$$