Elipse pogreškov – Koordinate točke A in B:

V državnem koordinatnem sistemu imamo podane koordinate dveh točk, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\mathrm{m}, 10\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (40\,\mathrm{m}, 35\,\mathrm{m})$. Podane imamo pa tudi natančnosti in korelacije koordinat obeh točk, in sicer:

- na točki A: $\sigma_{y_A} = 1.7\,\mathrm{cm}$, $\sigma_{x_A} = 2.1\,\mathrm{cm}$ in $\rho_{y_A x_A} = -0.1$
- na točki B: $\sigma_{y_B} = 2.0\,\mathrm{cm}$, $\sigma_{x_B} = 1.9\,\mathrm{cm}$ in $\rho_{y_B x_B} = 0.1$
- korelacije: $\rho_{y_A y_B} = -0.2$, $\rho_{y_A x_B} = 0.2$, $\rho_{x_A y_B} = -0.1$ in $\rho_{x_A x_B} = -0.1$

Izračunaj:

- kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{AB}$ položajev (koordinat) točke A in B,
- parametre absolutne elipse pogreškov na točki A, in sicer standardno elipso pogreškov, 95% elipso pogreškov in 99% elipso pogreškov,
- parametre absolutne elipse pogreškov na točki B, in sicer standardno elipso pogreškov, 95% elipso pogreškov in 99% elipso pogreškov,
- kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\overline{AB}}$ vektorja $\overline{AB}$ in
- parametre relativne elipse pogreškov vektorja $\overline{AB}$, in sicer standardno elipso pogreškov, 95% elipso pogreškov in 99% elipso pogreškov.

Elipse tudi izrišite.

Podane imamo koordinate dveh točk, A in B, kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}_{AB}$ položajev obeh točk je torej velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{AB} &= \begin{bmatrix} \sigma_{y_A}^2 & \sigma_{y_A x_A} & \sigma_{y_A y_B} & \sigma_{y_A x_B} \\ \sigma_{y_A x_A} & \sigma_{x_A}^2 & \sigma_{x_A y_B} & \sigma_{x_A x_B} \\ \sigma_{y_A y_B} & \sigma_{x_A y_B} & \sigma_{y_B}^2 & \sigma_{y_B x_B} \\ \sigma_{y_A x_B} & \sigma_{x_A x_B} & \sigma_{y_B x_B} & \sigma_{x_B}^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Za izračun polosi standardne elipse pogreškov bomo uporabili sledeči enačbi:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\lambda_1} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \\ b &= \sqrt{\lambda_2} \quad \rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \end{aligned} \tag{2}$$

medtem ko bomo za matematični kot zasuka velike polosi glede na absciso uporabili:

$$\theta = \frac{\texttt{atan2}(2\sigma_{yx}, \sigma_y^2 - \sigma_x^2)}{2} \tag{3}$$

V enačbah 2 in 3 so parametri σ_y, σ_x in σ_{yx} generični, torej jih bomo v nadaljevanju ustrezno nadomestili.
Za izračun parametrov absolutne elipse pogreškov na točki A iz kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{AB}$ v enačbi 1 uporabimo kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_A$ točke A, ki predstavlja pod-matriko matrike $\mathbf{\Sigma}_{AB}$, kjer vzamemo le prvi dve vrstici in prva dva stolpca. Uporabimo enačbe 2 in 3 za podatke natančnosti točke A, in dobimo:

- Standardna elipsa pogreškov: $k =$ ___, $a =$ ___cm, $b =$ ___cm in $\theta =$ ___°
- 95% elipsa pogreškov: $k =$ ___, $a =$ ___cm, $b =$ ___cm in $\theta =$ ___°
- 99% elipsa pogreškov: $k =$ ___, $a =$ ___cm, $b =$ ___cm in $\theta =$ ___°

Za izračun parametrov absolutne elipse pogreškov na točki B pa iz matrike $\mathbf{\Sigma}_{AB}$ vzamemo zadnji dve vrstici in zadnja dva stolpca in dobimo:

- Standardna elipsa pogreškov: $k =$ ___, $a =$ ___cm, $b =$ ___cm in $\theta =$ ___°
- 95% elipsa pogreškov: $k =$ ___, $a =$ ___cm, $b =$ ___cm in $\theta =$ ___°
- 99% elipsa pogreškov: $k =$ ___, $a =$ ___cm, $b =$ ___cm in $\theta =$ ___°

Kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\overline{AB}}$ vektorja $\overline{AB}$ dobimo lahko po enačbah, ki so prikazane v dokumentu ElipsePogreskov.pdf, tu pa pokažimo zakon o prenosu varianc in kovarianc (dobimo seveda iste rezultate):

$$\mathbf{\Sigma}_{\overline{AB}} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{AB}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{2\times2} & \mathbf{I}_{2\times2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

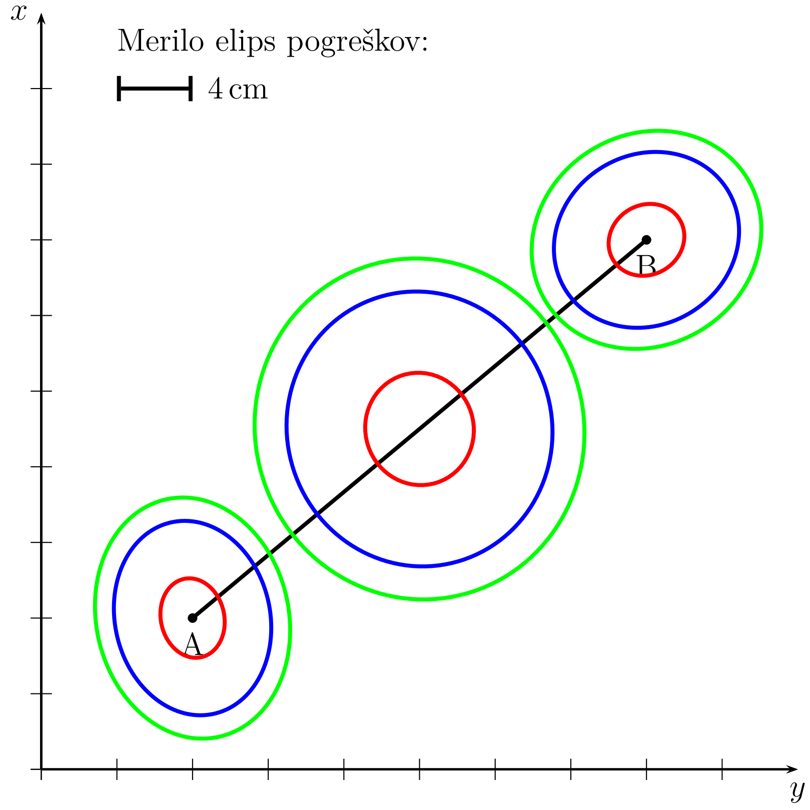
Kovariančna matrika iz enačbe 4 ima vrednosti:

$$\mathbf{\Sigma}_{AB} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\Delta y} & \sigma_{\Delta y \Delta x} \\ \sigma_{\Delta y \Delta x} & \sigma^2_{\Delta x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \mathrm{m}^2 \tag{5}$$

V enačbi 5 sta $\Delta y = y_B - y_A$ in $\Delta x = x_B - x_A$ in predstavljata enačbi za funkcijsko povezavo, iz katerih dobimo jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ iz enačbe 4. Parametre relativne elipse pogreškov vektorja $\overline{AB}$ so:

- Standardna elipsa pogreškov: $k =$ ___, $a =$ ___cm, $b =$ ___cm in $\theta =$ ___°
- 95% elipsa pogreškov: $k =$ ___, $a =$ ___cm, $b =$ ___cm in $\theta =$ ___°
- 99% elipsa pogreškov: $k =$ ___, $a =$ ___cm, $b =$ ___cm in $\theta =$ ___°

Na koncu še izrišimo celotno situacijo, položaje točk, vektor med točkami in vse elipse pogreškov, kar prikazuje slika 1. Rdeče so standardne elipse pogreškov, modre so 95% elipse pogreškov in zelene 99% elipse pogreškov.



Slika 1: Izris geodetske mreže in elips pogreškov