

1 ELIPSE POGREŠKOV

Pri zakonu o prenosu varianc in kovarianc (glej datoteko [PrenosVarCovar.pdf](#)) smo videli, da lahko izračunamo variančno-kovariančno matriko Σ_{yy} neznank \mathbf{y} , če imamo na voljo opazovanja \mathbf{x} in kjer poznamo funkcijsko povezavo $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ med opazovanji in neznankami. Ena izmed najbolj pomembnih nalog, če ne kar najbolj pomembna naloga, v geodeziji je izračun koordinat točk in ocena kakovosti položaja točk. Položaj točke tradicionalno razdelimo na horizontalno komponento (državna projekcija) in na višinsko komponento, zato je tudi izračun ponavadi ločen. V horizontalni ravnini želimo določiti položaj točke in ga tudi ovrednotiti, kar naredimo s kovariančno matriko položaja točke. Dobimo natančnosti obeh koordinat (σ_y in σ_x) in njuno korelacijo (ρ_{yx}). Zanima pa nas, ali obstaja tudi način podajanja natančnosti položaja točke v ravnini, ki bi bil geometrično predstavljen in hkrati koordinatno neodvisen¹. Izkaže se, da to lahko naredimo z **ELIPSAMI POGREŠKOV**.

1.1 Motiv

Pri zakonu o prenosu varianc in kovarianc smo na metodah določitve koordinat (polarna izmera, zunanji vrez, ločni presek, izmera GNSS) prikazali, kako kakovostno so določene koordinate in kakšne oblike so rezultati. Obravnavajmo tudi tu polarno izmero, kjer so podatki dani kot:

- dve dani točki: $A(y_A, x_A) = (10.0 \text{ m}, 90.0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (30.0 \text{ m}, 10.0 \text{ m})$,
- dve novi točki: $T_1(y_1, x_1)$ in $T_2(y_2, x_2)$,
- opazovanja: $\alpha_1 = 80^\circ$ in $\alpha_2 = 40^\circ$ ter $d_1 = d_2 = d = 65.0 \text{ m}$,
- natančnosti opazovanj: $\sigma_d = 2 \text{ mm}$ in $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} = 3''$

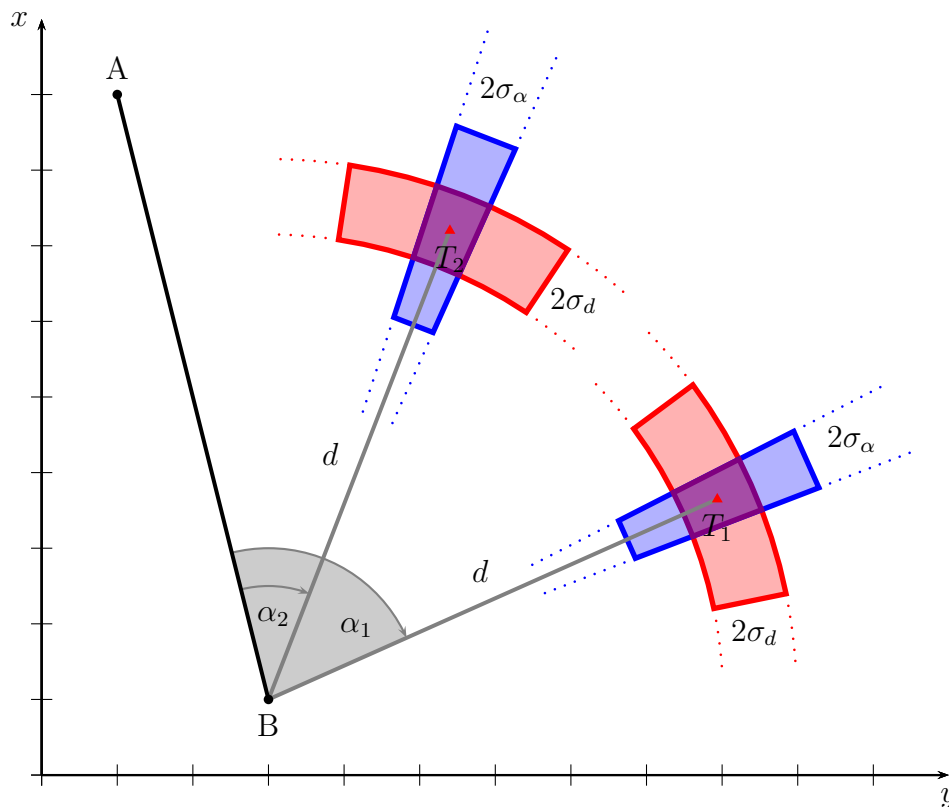
Situacijo prikazuje slika 1.

Enačbe za izračun položaja točk T_1 in T_2 so:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_B + d \sin(\nu_A^B + \alpha_1 - 180^\circ) = 89.364 \text{ m} \\
 x_1 &= x_B + d \cos(\nu_A^B + \alpha_1 - 180^\circ) = 36.475 \text{ m} \\
 y_2 &= y_B + d \sin(\nu_A^B + \alpha_2 - 180^\circ) = 58.457 \text{ m} \\
 x_2 &= x_B + d \cos(\nu_A^B + \alpha_2 - 180^\circ) = 68.440 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Na osnovi zakona o prenosu varianc in kovarianc lahko izračunamo kovariančni matriki obeh točk, Σ_1 in Σ_2 . Sestavimo kovariančno matriko opazovanj ($\Sigma_{d\alpha}$), na osnovi enačb 1

¹kaj to pomeni, bomo videli v nadaljevanju



Slika 1: Določitev koordinat in njihovih natančnosti pri polarni izmeri

izračunamo jakobijsko matriko za obe točki, \mathbf{J}_1 in \mathbf{J}_2 , in dobimo:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \begin{bmatrix} 3.485 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1.156 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ 1.156 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1.409 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \\ \Sigma_2 &= \begin{bmatrix} 1.489 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1.223 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ 1.223 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 3.405 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Iz obeh kovariančnih matrik iz enačbe 2 lahko sedaj izračunamo natančnosti in korelacije koordinat obeh točk. Dobimo:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} &= 1.87 \text{ mm} & \sigma_{x_1} &= 1.19 \text{ mm} & \rho_{y_1 x_1} &= 0.52 \\ \sigma_{y_2} &= 1.22 \text{ mm} & \sigma_{x_2} &= 1.85 \text{ mm} & \rho_{y_2 x_2} &= 0.54 \end{aligned} \quad (3)$$

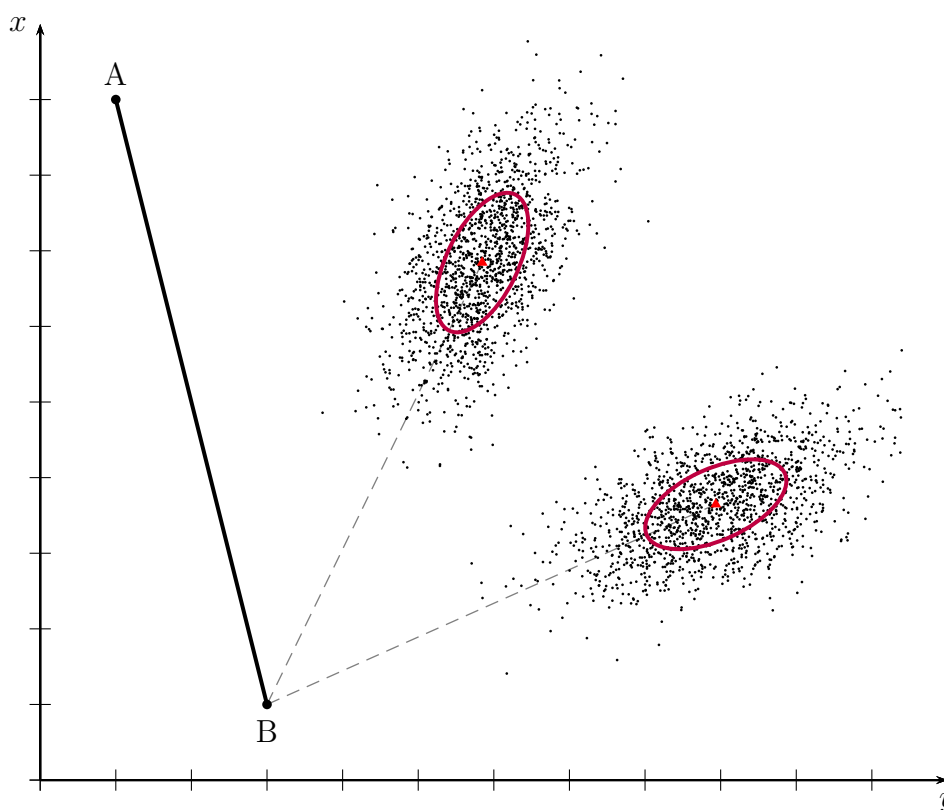
Rezultati iz enačbe 3 kažejo na zelo različne informacije o natančnosti koordinat obeh točk, po drugi strani pa na sliki 1 lahko vidimo, da sta obliki in velikosti obeh vijoličnih likov enaka. Pričakovali torej bi, da bi dobili enake informacije o natančnostih koordinat obeh točk.

Prvo, kar se vprašamo je, ali je slika 1 sploh pravi prikaz kakovosti določitve koordinat na osnovi izmerjenega kota α_1 (ali α_2) in dolžine d ? To lahko enostavno preverimo tako, da izvedemo simulacijo polarne izmere. Predpostavke, ki jih naredimo:

- $d \sim N(\bar{d}, \sigma_d = 2 \text{ mm})$, kar beremo kot: slučajna spremenljivka dolžina d se porazdeljuje po normalni porazdelitvi, s srednjo vrednostjo \bar{d} in standardnim odklonom σ_d ,

- $\alpha_1 \sim N(\bar{\alpha}_1, \sigma_\alpha = 3'')$ in $\alpha_2 \sim N(\bar{\alpha}_2, \sigma_\alpha = 3'')$
- število simuliranih položajev: $n_s = 1500$

Za obe točki simulirajmo $n_s = 1500$ izračunanih položajev, kjer v vsakem koraku simulacije pravim vrednostim opazovanj prištejemo naključne vrednosti pogreškov, ki imajo zgoraj predpostavljene statistične lastnosti. Sedaj za obe točki izrišimo vse izračunane položaje, kar je prikazano na sliki 2. Iz slike je razvidno, da območje, kjer so podane izmerjene točke ni nič podobno obliki vijoličnega območja (pravokotniku) iz slike 1. Izkaže se, da se točke porazdelijo v obliki elipse, kjer je gostota točk večja v bližini sredine elipse (rdeča trikotnika) in se gostota točk z oddaljenjem od sredine zmanjšuje. Elipsi pogreškov sta prikazani s škrlatno polno črto. Naslednje vprašanje pa je, od kje izhaja oblika elipse in kako dobiti parametre elipse pogreškov.



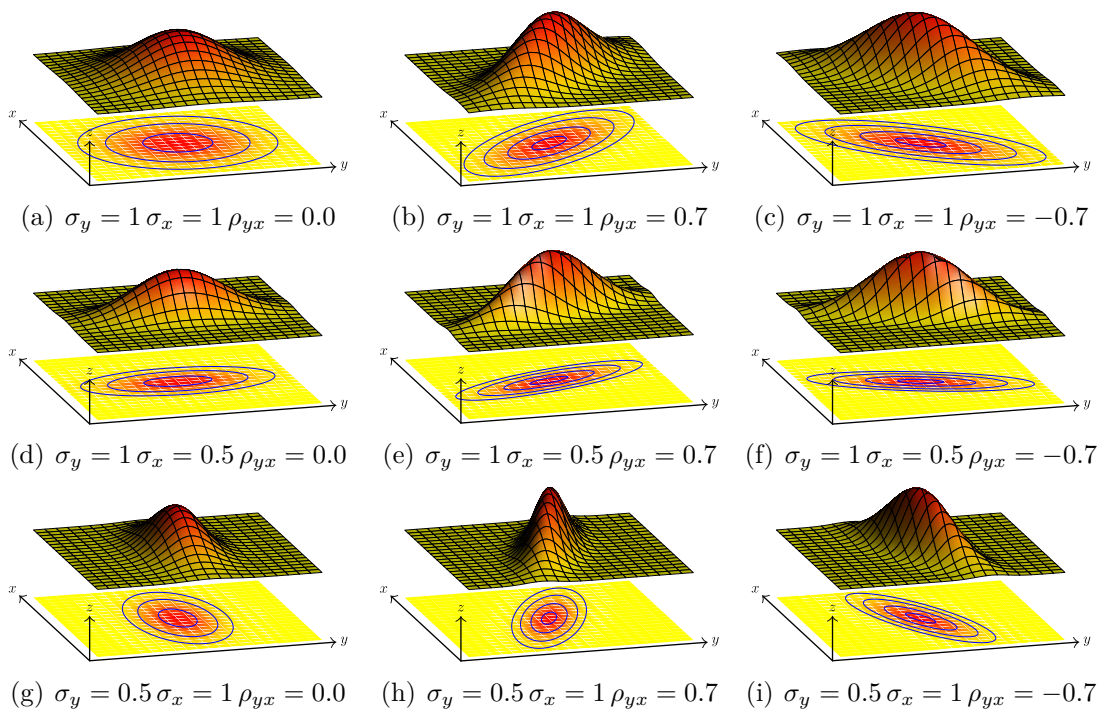
Slika 2: Izračun položajev točk T_1 in T_2 na osnovi simuliranih opazovanj pri polarni izmeri

1.2 Normalna porazdelitev dveh slučajnih spremenljivk

Iz rezultatov polarne izmere iz enačb 2 in 3 vidimo, da lahko koordinati y in x točke T obravnavamo kot skupno porazdeljeni slučajni spremenljivki, ki se porazdelujeta po normalni porazdelitvi. Funkcijo gostote verjetnosti obeh slučajnih spremenljivk y in x lahko opišemo v obliki:

$$f(y, x) = \frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_x\sqrt{1-\rho_{yx}^2}} e^{-\left\{ \frac{1}{2(1-\rho_{yx}^2)} \left[\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 - 2\rho_{yx} \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right) \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right) + \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \right\}} \quad (4)$$

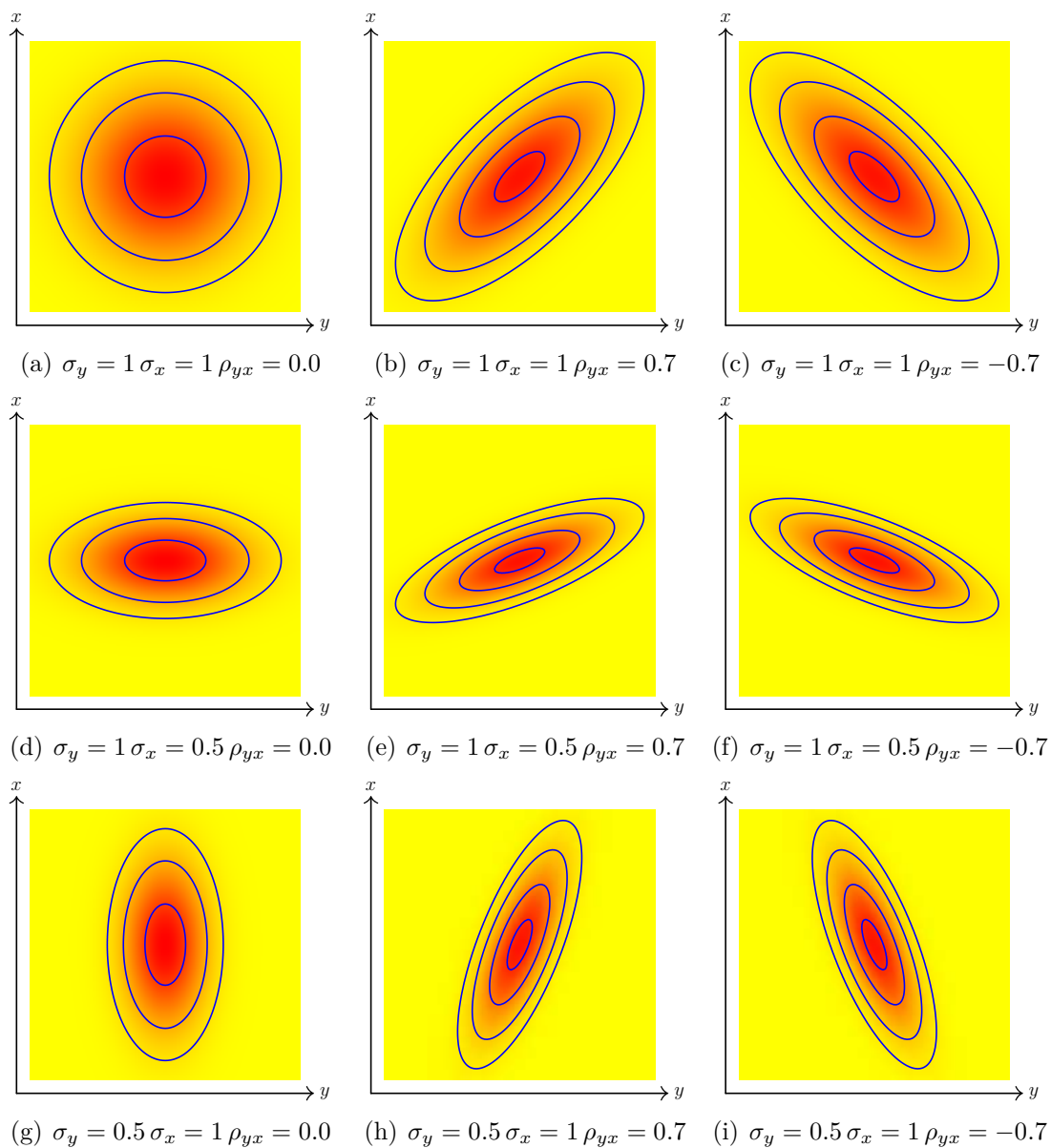
V enačbi 4 sta μ_y in μ_x srednji vrednosti, σ_y in σ_x standardna odklona in ρ_{yx} korelacija spremenljivk y in x . Grafično lahko enačbo 4 prikažemo z zvonasto ploskvijo, kjer je oblika in orientacija te zvonaste ploskve odvisna od treh količin, in sicer od σ_y , σ_x in ρ_{yx} . Lokacija vrha ploskve pa je odvisna od srednjih vrednosti μ_y in μ_x . Slika 3 prikazuje obliko zvonaste ploskve iz enačbe 4 pri različnih vrednosti parametrov σ_y , σ_x in ρ_{yx} . Slike 3(a), 3(b) in 3(c) v prvi vrsti prikazujejo enaki natančnosti spremenljivk ($\sigma_y = \sigma_x$), le da so korelacije različne, od $\rho_{yx} = 0.0$, do $\rho_{yx} = 0.7$ in $\rho_{yx} = -0.7$. Slike 3(d), 3(e) in 3(f) v drugi vrsti prikazujejo vpliv različne korelacije pri različno natančnih spremenljivkah y in x ($\sigma_y = 1$, $\sigma_x = 0.5$). Slike 3(g), 3(h) in 3(i) pa prikazujejo podobno situacijo kot slike v drugi vrsti, le da je sedaj koordinata y bolj natančna ($\sigma_y = 0.5$, $\sigma_x = 1$). V ravnini yx so prikazane izolinije in barvni prikaz funkcije gostote verjetnosti za vse primere.



Slika 3: Funkcija gostote verjetnosti dveh skupno normalno porazdeljenosti slučajnih spremenljivk y in x v odvisnosti od parametrov σ_y , σ_x in ρ_{yx}

Slika 4 prikazuje izolinije funkcije gostote verjetnosti za vse primere prikaza iz slike 3. Izolinije si lahko predstavljamo tudi tako, da ploskve funkcije gostote verjetnosti iz enačbe 3 sekamo z ravnino, ki je vzporedna ravnini yx , podana za različne vrednosti koordinate z . Če imamo dve spremenljivki enake natančnosti in medseboj nekorelirana, potem so izolinije krožnice (slika 4(a)). Takoj, ko imamo korelirani spremenljivki, izolinije postanejo elipse (slike 4(b) in 4(c)), pri tem da pozitivna korelacija povzroči usmerjenost elipse v smeri premice $y = x$, negativna pa v obratni smeri, $y = -x$. V primeru, ko pa spremenljivki nista enake natančnosti, pa so izolinije vedno elipse (slike 4(d), 4(e), 4(f), 4(g), 4(h) in 4(i)). Ko korelacije ni, je elipsa vedno usmerjena (raztegnjena) v smeri tiste koordinate, ki je slabše natančnosti, v smeri y osi na sliki 4(d) oziroma v smeri x osi na sliki 4(g). Vpliv korelacije na slikah 4(e), 4(f), 4(h) in 4(i) pa je podoben kot na slikah 4(b) in 4(c),

le da je od natančnosti koordinat odvisno, ali bo elipsa bolj pokončna, ali ne.



Slika 4: Izolinije funkcija gostote verjetnosti dveh skupno normalno porazdeljenosti slučajnih spremenljivk y in x v odvisnosti od parametrov σ_y , σ_x in ρ_{yx} v ravnini yx

Matematično, pa imajo preseki, oziroma izolinije, iz slik 4 obliko, ki je določena z enačbo:

$$\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho_{yx} \left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right) \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right) + \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2 = (1 - \rho_{yx}^2)k^2 \quad (5)$$

Enačba 5 v splošnem prikazuje obliko elipse, kar je razvidno iz slik 4. Faktor k iz enačbe 5 predstavlja konstanto, ki nam določi “višino” presečne ravnine nad ravnino yx , oz. nam

določi velikost elipse, večji kot je k , večja je elipsa. Faktor k se določi kot:

$$k^2 = -2 \ln \left(C 2\pi \sigma_y \sigma_x \sqrt{1 - \rho_{yx}^2} \right) \quad (6)$$

Konstanta C v enačbi 6 predstavlja konstantno vrednost funkcije gostote verjetnosti $f(y, x) = C$ iz enačbe 4.

1.3 Izračun parametrov elipse pogreškov

Pri poljubni vrednosti faktorja k iz enačbe 6 lahko določimo velikost in obliko elipse pogreškov, kar dobimo tako, da izračunamo tri parametre elipse pogreškov, in sicer:

1. velika polos elipse pogreškov: a ,
2. mala polos elipse pogreškov: b ,
3. matematični kot zasuka velike polosi elipse, glede na izhodiščni (yx) koordinatni sistem: θ .

Za izračun parametrov elipse pogreškov izhajamo iz variančno-kovariančne matrike Σ_{yx} položaja točke, ki je določena z:

$$\Sigma_{yx} = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \quad \sigma_{yx} = \rho_{yx} \sigma_y \sigma_x \quad (7)$$

Iz vsebine kovariančne matrike Σ_{yx} v enačbi 7 vidimo, da kovariančno matriko sestavljajo trije podatki, in sicer σ_y , σ_x in ρ_{yx} . Izračun parametrov elipse pogreškov (a , b in θ) dobimo iz elementov kovariančne matrike Σ_{yx} , in sicer, da matriki Σ_{yx} poiščemo obe lastni vrednosti in orientacijo obeh lastnih vektorjev v ravnini. Rešitev dobimo tako, da poiščemo netrivialno rešitev za lastni vrednosti λ_1 in λ_2 ter pripadajoča lastna vektorja \mathbf{x}_1 in \mathbf{x}_2 enačbe:

$$(\Sigma_{yx} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Rešitev enačbe 8 je dana z dvema lastnima vrednostima λ_1 in λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \\ \lambda_2 &= \frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2}{4} + \sigma_{yx}^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Lastni vrednosti iz enačbe 9 predstavljata osnovo za izračun velike in male polosi elipse pogreškov, saj velja:

$$a = \sqrt{\lambda_1} \quad b = \sqrt{\lambda_2} \quad (10)$$

Orientacijo elipse določimo z izračunom kota θ , ki ga izračunamo iz enačbe:

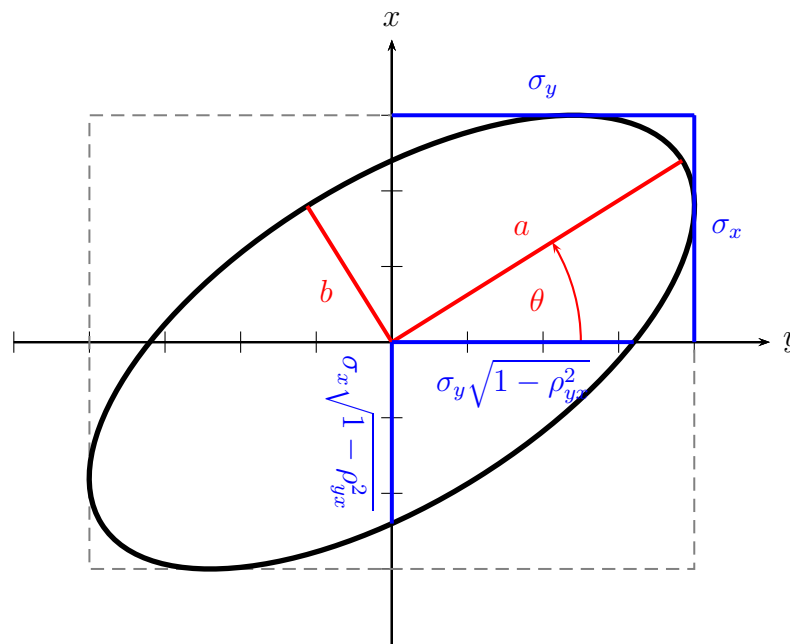
$$\tan(2\theta) = \frac{2\sigma_{yx}}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2} \quad (11)$$

Za pravilno vrednost kota θ iz enačbe 11 moramo enačbo rešiti na enak način kot smerni kot. Upoštevajoč kvadrante (predznaka števca in imenovalca) izračunamo vrednost 2θ med 0° in 360° , nato pa kot θ dobimo z deljenjem z 2. Praktičen izračun je tudi z uporabo funkcije `atan2`, ki je implementirana pri večini programskih jezikov. Velja:

$$\theta = \frac{\text{atan2}(2\sigma_{yx}, \sigma_y^2 - \sigma_x^2)}{2} \quad (12)$$

Kot zasuka θ predstavlja kot med absciso (v našem primeru y osjo) in veliko polosjo elipse pogreškov a (lastnim vektorjem \mathbf{x}_1 , ki pripada največji lastni vrednosti λ_1). Ker je kovariančna matrika simetrična, je drugi lastni vektor \mathbf{x}_2 (pripada drugi lastni vrednosti λ_2) pravokoten na \mathbf{x}_1 . Tako \mathbf{x}_1 prikazuje smer največje vrednosti variance (najslabšo natančnost, določena s polosjo a) in \mathbf{x}_2 smer najmanjše variance (najboljša natančnost, določena s polosjo b).

Geometrično pa si elipso pogreškov, ki je določena s parametri a , b in θ , v povezavi s parametri kovariančne matrike Σ_{yx} , ki so σ_y , σ_x in ρ_{yx} , predstavimo na spodnji sliki.



Slika 5: Parametri elipse pogreškov - geometrični prikaz

1.4 Standardna elipsa pogreškov in območje zaupanja

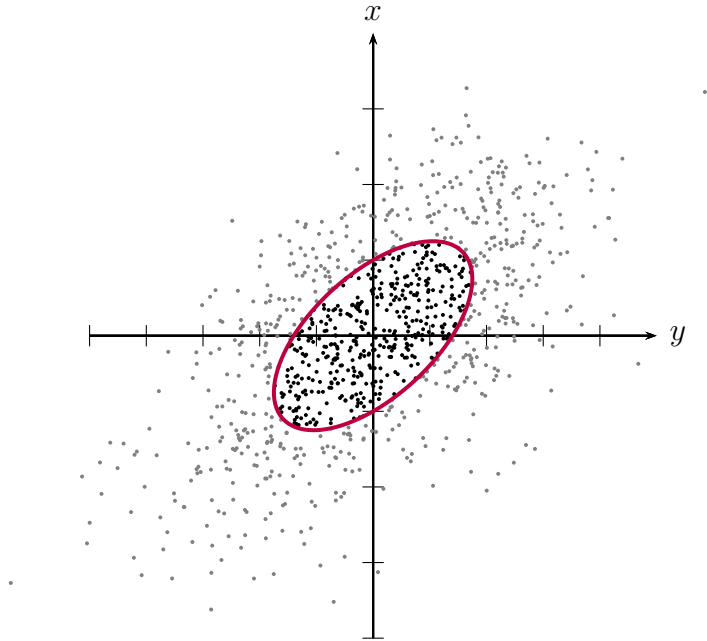
Kadar računamo elipso pogreškov tako, da polosi elipse pogreškov (a in b) predstavljata korena lastnih vrednosti (λ_1 in λ_2), kot je to prikazano v enačbi 10, govorimo o t.i. **standardni elipsi pogreškov**. V tem primeru ima faktor k iz enačbe 6 vrednost 1. Simulirajmo tudi tu položaj točke, podobno kot smo to naredili za točki T_1 in T_2 na sliki 2. Izhodiščni podatki za simulacijo so:

$$\sigma_y = 1.75 \quad \sigma_x = 1.25 \quad \rho_{yx} = 0.60$$

Parametri elipse pogreškov, izračunani na osnovi enačbe 10 za polosi a in b ter enačbe 11 za kot θ , pa so:

$$a = 1.96 \quad b = 0.90 \quad \theta = 20.13^\circ$$

Elipso pogreškov in simulirane položaje okoli srednje vrednosti obeh koordinat točke T prikazuje slika 6.



Slika 6: Standardna elipsa pogreškov in simulacija točk

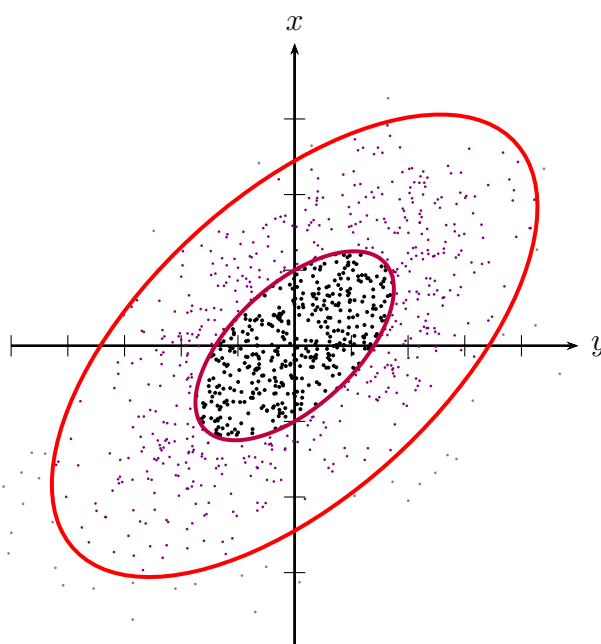
Iz slike 6 vidimo, da so nekatere točke znotraj elipse pogreškov (črne pike), ostale točke pa so zunaj elipse pogreškov (sive pike). Z elipso pogreškov skušamo pokazati območje zaupanja izračunanega položaja točke, v smislu, da se pravi položaj točke nahaja znotraj elipse pogreškov. A iz slike vidimo, da kar znaten del točk pade izven elipse. Število položajev simuliranih točk, ki padejo v notranjost standardne elipse pogreškov je samo 39.40%, kar predstavlja dobro tretjino. Vsi ostali položaji so izven standardne elipse pogreškov. Ali če povemo drugače, ko določimo koordinate neke točke, je verjetnost, da leži pravi položaj točke znotraj elipse pogreškov le 39.40%. Če želimo to verjetnost povečati, moramo izbrati faktor k iz enačbe 6 ustrezno večji od 1 in tako polosi elipse pogreškov izračunati kot:

$$a = k\sqrt{\lambda_1} \quad b = k\sqrt{\lambda_2} \quad (13)$$

Za različne vrednosti faktorja k dobimo različne vrednosti verjetnosti (oznaka P v tabeli 1), s katero želimo opisati natančnost določenega položaja točke. Tabela 1 prikazuje odvisnost iskane verjetnosti od vrednosti faktorja k . Poudarjen izpis prikazuje največkrat uporabljene elipse pogreškov, in sicer standardno elipso pogreškov ($k = 1.000$ in $P = 0.394$) ter t.i. 95% elipso pogreškov ($k = 2.447$ in $P = 0.95$).

k	P
1.000	0.394
1.177	0.500
2.000	0.865
2.146	0.900
2.447	0.950
3.035	0.990

Tabela 1: Verjetnost P , da je pravi položaj točke znotraj elipse pogreškov, v odvisnosti od faktorja k



Slika 7: Standardna elipsa pogreškov, 95% elipsa pogreškov in simulacija točk

Slika 7 prikazuje standardno elipso pogreškov iz slike 6 v škrlatni barvi in vse simulirane položaje točk, ki so znotraj standardne elipse pogreškov v črni barvi. Večja elipsa pogreškov je 95% elipsa pogreškov (rdeča barva). Znotraj te elipse pogreškov je 95% vseh simuliranih položajev, a je kar 2.447-krat večja od standardne elipse pogreškov. Vsi simulirani položaji, ki so znotraj te elipse so označeni z vijolično in črno barvo. Ostalih 5% položajev je sive barve in se najahajo izven elipse pogreškov.

1.5 Absolutna in relativna elipsa pogreškov

Absolutna elipsa pogreškov

Absolutno elipso pogreškov računamo na osnovi kovariančne matrike Σ_{yx} posamezne točke. Če imamo podano kovariančno Σ matriko večih točk geodetske mreže, vzamemo

za osnovo odgovarjajočo kvadratno podmatriko na diagonali celotne matrike. Izračun parametrov elipse pogreškov poteka po enačbah iz poglavja 1.3, veliko in malo polos standardne elipse pogreškov izračunamo na osnovi enačbe 10, kot zasuka na osnovi enačbe 11, polosi za elipse pogreškov večje verjetnosti pa na osnovi enačbe 13, kjer faktor k dobimo iz preglednice 1. Izris absolutne elipse pogreškov:

- središče absolutne elipse pogreškov je točka,
- merilo izrisa elipse pogreškov naj ne bo enakov merilu celotne skice geodetske mreže.

Relativna elipsa pogreškov

Relativno elipso pogreškov določamo med dvema točkama T_1 in T_2 , katerih natančnost položaja je podana z variančno kovariančno matriko Σ_{12} :

$$\Sigma_{12} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1x_1} & \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{y_1x_2} \\ \sigma_{y_1x_1} & \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1y_2} & \sigma_{x_1x_2} \\ \sigma_{y_1y_2} & \sigma_{x_1y_2} & \sigma_{y_2}^2 & \sigma_{y_2x_2} \\ \sigma_{y_1x_2} & \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{y_2x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Pri relativni elipsi pogreškov moramo izračunati kovariančno matriko $\Sigma_{\Delta y \Delta x}$, ki se nanaša na vektor med točkama T_1 in T_2 in ima obliko:

$$\Sigma_{\Delta y \Delta x} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta y}^2 & \sigma_{\Delta y \Delta x} \\ \sigma_{\Delta y \Delta x} & \sigma_{\Delta x}^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Kovariančno matriko $\Sigma_{\Delta y \Delta x}$ iz enačbe 15 dobimo na osnovi zakona o prenosu varianc in kovarianc. Elementi matrike 15 so:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta y}^2 &= \sigma_{y_1}^2 - 2\sigma_{y_1y_2} + \sigma_{y_2}^2 \\ \sigma_{\Delta x}^2 &= \sigma_{x_1}^2 - 2\sigma_{x_1x_2} + \sigma_{x_2}^2 \\ \sigma_{\Delta y \Delta x} &= \sigma_{y_1x_1} + \sigma_{y_2x_2} - \sigma_{y_1x_2} - \sigma_{y_2x_1} \end{aligned} \quad (16)$$

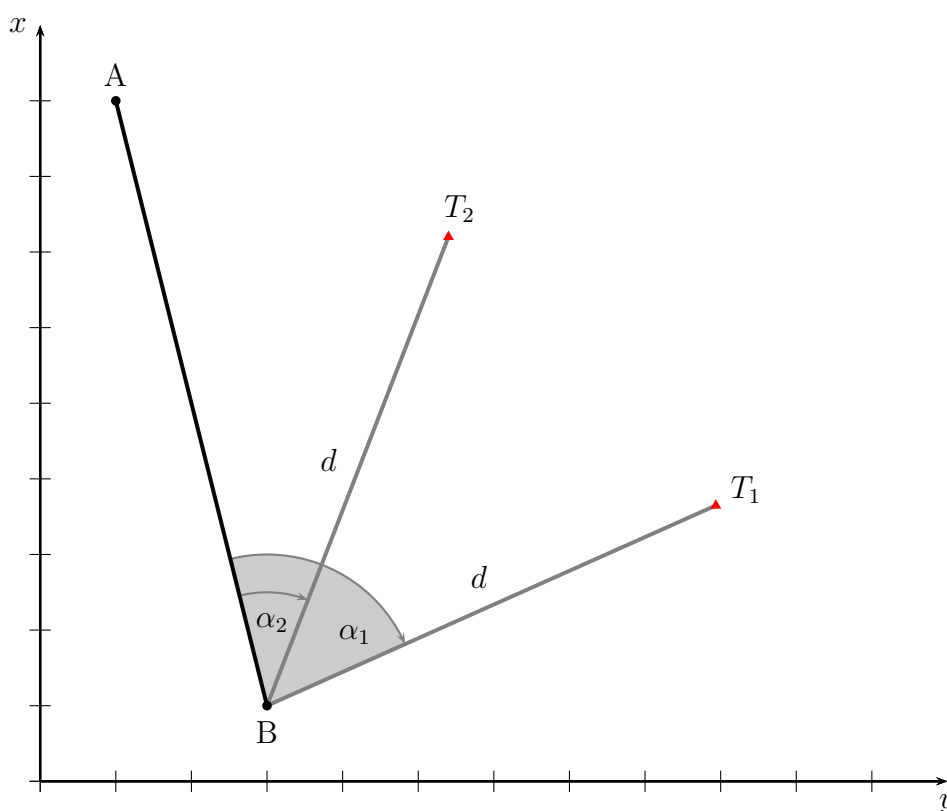
Relativna elipsa pogreškov prikazuje natančnost relativnih položajev med točkami. Natančnost položaja geodetske točke je odvisna od dveh količin, in sicer natančnosti položajev danih točk in natančnosti opazovanj. Kadar imamo položaje danih točk slabe bodo absolutne elipse točk prav tako slabe. Z relativnimi elipsami pogreškov tako lahko ocenimo natančnost relativnega položaja točk med seboj.

Izris relativne elipse pogreškov:

- središče relativne elipse pogreškov je na sredini zveznice $\overline{T_1T_2}$,
- merilo izrisa elipse pogreškov naj ne bo enakov merilu celotne skice.

1.6 Primer naloge – Polarna izmera

Rešimo primer, ki smo si ga podali v poglavju 1.1. Določiti želimo koordinate dveh novih točk, T_1 in T_2 , pri tem, da bomo izhajali iz dveh danih točk $A(y_A, x_A) = (10.00 \text{ m}, 90.00 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (30.00 \text{ m}, 10.00 \text{ m})$, opazovali pa bi $\alpha_1 = 80^\circ$ in $\alpha_2 = 40^\circ$ ter $d_1 = d_2 = d = 65.00 \text{ m}$, ki imajo natančnosti $\sigma_d = 2 \text{ mm}$ in $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} = 3''$. Prikaz situacije je podan na sliki 8. Izračunaj koordinate novih točk ($T_1(y_1, x_1)$, $T_2(y_2, x_2)$), določi variančno-kovariančno matriko obeh točk (Σ_{12}), določi natančnosti vseh koordinat obeh točk (σ_{y_1} , σ_{x_1} , σ_{y_2} in σ_{x_2}) ter vse njihove korelacije ($\rho_{y_1x_1}$, $\rho_{y_2x_2}$, $\rho_{y_1y_2}$, $\rho_{y_1x_2}$, $\rho_{x_1y_2}$, $\rho_{x_1x_2}$). Izračunaj tudi parametre absolutne elipse pogreškov na obeh točkah, parametre 95% elipse pogreškov, relativno standardno elipso pogreškov in relativno 95% elipso pogreškov med točkama T_1 in T_2 .



Slika 8: Določitev koordinat in njihovih natančnosti pri polarni izmeri

Izhajamo iz enačb poligona za izračun položaja točk T_1 in T_2 , ki so (rezultati so seveda enaki kot v poglavju 1.1, v enačbi 1:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_B + d \sin(\nu_A^B + \alpha_1 - 180^\circ) = y_B + d \sin \nu_B^{T_1} = 89.364 \text{ m} \\
 x_1 &= x_B + d \cos(\nu_A^B + \alpha_1 - 180^\circ) = x_B + d \cos \nu_B^{T_1} = 36.475 \text{ m} \\
 y_2 &= y_B + d \sin(\nu_A^B + \alpha_2 - 180^\circ) = y_B + d \sin \nu_B^{T_2} = 58.457 \text{ m} \\
 x_2 &= x_B + d \cos(\nu_A^B + \alpha_2 - 180^\circ) = x_B + d \cos \nu_B^{T_2} = 68.440 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{17}$$

Smerni kot ν_A^B iz enačbe 17 je enak $\nu_A^B = 165^\circ 57' 49.5''$, medtem ko sta smerna kota $\nu_B^{T_1} = 65^\circ 57' 49.5''$ in $\nu_B^{T_2} = 25^\circ 57' 49.5''$. Izračun neznank iz enačbe 17 temelji na štirih

opazovanjih, in sicer $d_1 = d_2 = d$, α_1 in α_2 , za katere je kovariančna matrika enaka:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.115 \times 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.115 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Na osnovi funkcijskih povezav med opazovanji in neznankami iz enačbe 17 sestavimo jakobijevo matriko \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sin \nu_B^{T_1} & d \cos \nu_B^{T_1} & 0 & 0 \\ \cos \nu_B^{T_1} & -d \sin \nu_B^{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \nu_B^{T_2} & d \cos \nu_B^{T_2} \\ 0 & 0 & \cos \nu_B^{T_2} & -d \sin \nu_B^{T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.913 & 26.475 \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0.407 & -59.364 \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.438 & 58.440 \text{ m}^2 \\ 0 & 0 & 0.899 & -28.457 \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Variančno-kovariančno matriko Σ_{12} izračunamo kot:

$$\Sigma_{12} = \mathbf{J}\Sigma\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} 3.485 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1.156 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 1.156 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1.409 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.489 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 1.223 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ 0 & 0 & 1.223 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 3.405 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Iz oblike kovariančne matrike Σ_{12} iz enačbe 20 lahko ugotovimo, da so:

- natančnosti koordinat in korelacije koordinat iste točke:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{y_1} = 1.867 \text{ mm} & \sigma_{x_1} = 1.187 \text{ mm} & \rho_{y_1x_1} = 5.215 \times 10^{-1} \\ \sigma_{y_2} = 1.220 \text{ mm} & \sigma_{x_2} = 1.845 \text{ mm} & \rho_{y_2x_2} = 5.430 \times 10^{-1} \end{array} \quad (21)$$

- korelacije med koordinatami različnih točk:

$$\rho_{y_1y_2} = \rho_{y_1x_2} = \rho_{x_1y_2} = \rho_{x_1x_2} = 0 \quad (22)$$

Za izračun elipsa pogreškov za obe točki vzamemo dve pod-matriki kovariančne matrike Σ_{12} , za točko T_1 prvi dve vrstici in prva dva stolpca, za točko T_2 pa zadnji dve vrstici in stolpca. Za polosi elipse uporabimo enačbo 10, za kot zasuka pa enačbo 12. Dobimo:

- standardna elipsa pogreškov in 95% elipsa pogreškov na točki T_1 :

$$\begin{array}{lll} a = 2.00 \text{ mm} & b = 0.95 \text{ mm} & \theta = 24.04^\circ \\ a_{95\%} = 4.90 \text{ mm} & b_{95\%} = 2.32 \text{ mm} & \theta_{95\%} = 24.04^\circ \end{array} \quad (23)$$

- standardna elipsa pogreškov in 95% elipsa pogreškov na točki T_2 :

$$\begin{array}{lll} a = 2.00 \text{ mm} & b = 0.95 \text{ mm} & \theta = 64.04^\circ \\ a_{95\%} = 4.90 \text{ mm} & b_{95\%} = 2.32 \text{ mm} & \theta_{95\%} = 64.04^\circ \end{array} \quad (24)$$

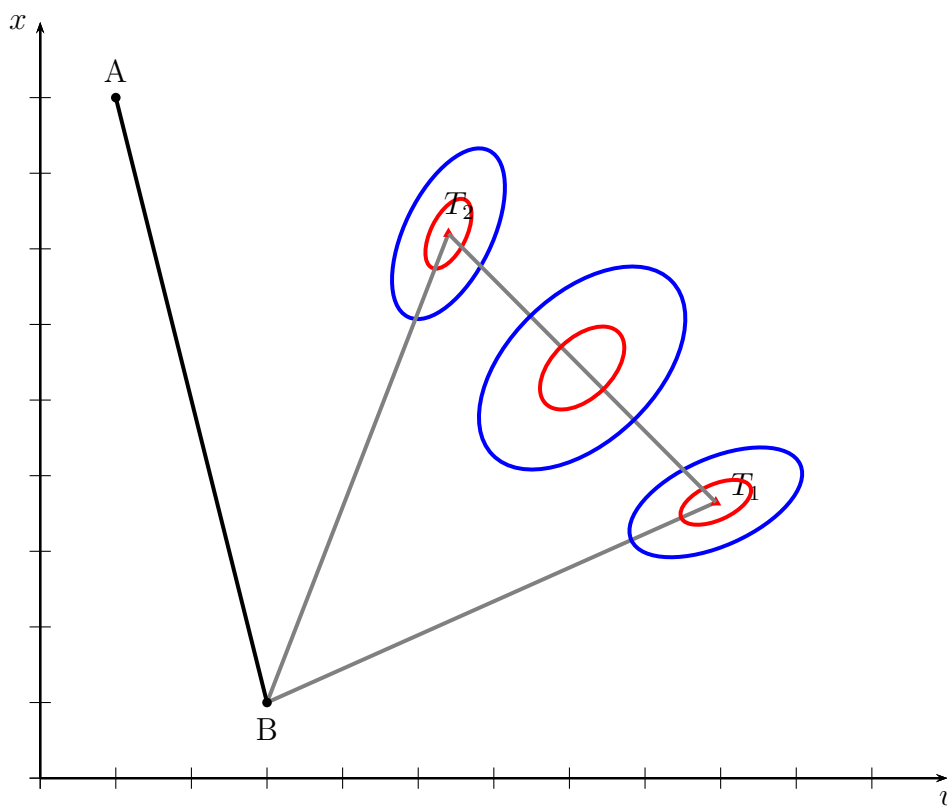
Izračunajmo še parametre relativne elipse pogreškov za vektor $\overline{T_1T_2}$. Kovariančna matrika $\Sigma_{\Delta y \Delta x}$ ima obliko:

$$\Sigma_{\Delta y \Delta x} = \begin{bmatrix} 4.974 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 2.378 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ 2.378 \times 10^{-6} \text{ m}^2 & 4.814 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Parametre standardne relativne elipse pogreškov in 95% relativne elipse pogreškov dobimo kot:

$$\begin{aligned} a &= 2.70 \text{ mm} & b &= 1.59 \text{ mm} & \theta &= 44.04^\circ \\ a_{95\%} &= 6.61 \text{ mm} & b_{95\%} &= 3.88 \text{ mm} & \theta_{95\%} &= 44.04^\circ \end{aligned} \quad (26)$$

Rezultati, ki smo jih dobili v tem primeru so potrebni komentarja. Kot prvo lahko vidimo, da sta oblika in velikost elipse pogreškov na točkah T_1 in T_2 enaki (enačbi 23 in 24). Ker sta obe točki izmerjeni na enak način (enak inštrumentarij, enaka dolžina), le kot je drugačen, je rezultat pričakovan. Elipse pogreškov pravimo, da so koordinatno neodvisne, saj bo oblika in velikost elipse vedno enaka pod enakimi pogoji izmere, neglede na to, kje je orientacija za polarno izmero. Da vidimo, kaj predstavljata velika in mala polos elipse pogreškov, pa prvo pogledjmo izrisane elips pogreškov na sliki 9.



Slika 9: Absolutni elipsi pogreškov točk T_1 in T_2 ter relativna elipsa pogreška vektorja $\overline{T_1T_2}$

Iz slike 9 je razvidno, da sta obe absolutni elipsi pogreškov usmerjeni ravno v smeri merjene dolžine (oz. poltrak merjenega kota). Oba kota zasuka elipse pogreškov sta dejansko enaka razliki obeh smernih kotov do 90° . Kaj pa predstavljata velikosti polosi? Velika polos je pri obeh točkah enaka $a = 2.00 \text{ mm}$, kar je ravno natančnost izmerjene

dolžine σ_d . Mala polos pa je enaka $b = 0.95$ mm, kar pa ravno predstavlja produkt $d\sigma_{alpha}$, če ga predstavimo v milimetrih. Velikosti polosi sta ravno natančnosti opazovanj.

Še zadnje, relativna elipsa pogreškov. Ker so koordinate točk T_1 in T_2 medseboj nekorrelirane, je relativna elipsa pogreškov ravno super-pozicija obeh elips pogreškov, tako po velikosti, kot tudi po usmerjenosti.