1 POTREBNA NATANČNOST GEODETSKIH OPAZOVANJ - URAVNOTEŽENE NATAČNOSTI

Pri prenosu varianc in kovarianc nas je zanimalo, s kakšno natančnostjo lahko dobimo ocenjene neznanke, če imamo podane natančnosti opazovanj. Pri potrebni natančnosti geodetskih opazovanj pa postopamo obratno. Imamo neko neznanko y, ki jo lahko izračunamo na osnovi n opazovanj $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_n$. Če imamo podano natančnost σ_y, s katero želimo določiti neznanko y, nas zanima, kakšne morajo biti natančnosti posameznih opazovanj $\sigma_{x_1},\ \sigma_{x_2},\ \sigma_{x_3}, \ldots, \sigma_{x_n}$, da zadostimo podanemu pogoju natančnosti neznanke (σ_y).

1.1 Izpeljava

Naj bo neznanka y neka nelinearna funkcija opazovanj $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_n$ v obliki:

$$y = f(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_n) \tag{1}$$

Če predpostavimo, da so opazovanja med seboj neodvisna (torej tudi nekorelirana), potem imamo za vsako opazovanje x_i svojo natančnost σ_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc lahko varianco neznanke σ_y^2 dobimo kot:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 \tag{2}$$

V enačbi 2 poznamo natančnost neznanke σ_y. Ker vemo, kako izračunamo y (enačba 1), poznamo tudi obliko parcialnih odvodov $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, numerične vrednosti pa lahko izračunamo na osnovi približnih vrednosti opazovanj (približne vrednosti opazovanj lahko pridobimo pred samo izmero). Česar v enačbi 2 ne poznamo, pa so natančnosti opazovanj σ_{x_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Če torej pogledamo enačbo 2 imamo eno enačbo in n neznanih količin. Da bi lahko izračunali natančnosti opazovanj enolično, moramo podati dodaten pogoj. Ta pogoj se imenuje pogoj uravnoteženih natančnosti.

Pogoj uravnoteženih natančnosti nam poda, da vsako opazovanje prinese enak delež k končni natančnosti neznanke, torej:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2 = \cdots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 = K \tag{3}$$

Enačbo 2 lahko tako v skladu z enačbo 3 zapišemo kot:

$$\sigma_y^2 = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2}_{K} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2}_{K} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2}_{K} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2}_{K} = nK \tag{4}$$

Oziroma:

$$\sigma_y^2 = nK \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\sigma_y^2}{n} \tag{5}$$

Iz dveh enakosti za količino K, in sicer iz desne enačbe v enačbi 5 in iz enačbe 3, lahko sedaj izpeljemo postopek za izračun potrebne natančnosti posameznega opazovanja:

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{\sigma_y^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 n} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{x_i} = \frac{\sigma_y}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \sqrt{n}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{6}$$

Na desni strani enačbe 6 je znak za absolutno vrednost nujen, saj je iskani rezultat natančnost i-tega opazovanja (standardni odklon), ki pa je vedno pozitivno število (parcialni odvod je lahko negativno število).

1.1.1 Poseben primer: natančnost σ_{x_1} poznamo

Kadar poznamo katero izmed natančnosti opazovanj (v tem primeru σ_{x_1}), potem ta vrednost v enačbi 2 ni neznana količina. V tem primeru jo lahko damo na levo stran enačbe in dobimo:

$$\sigma_y^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 \tag{7}$$

Če sedaj levo stran enačbe 7 izračunamo in označimo kot:

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \sigma_y^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma}_y = \sqrt{\tilde{\sigma}_y^2} \tag{8}$$

potem lahko enačbo 7 zapišemo kot:

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2 \tag{9}$$

Oziroma, ko podano pogoj uravnoteženih natančosti, dobimo:

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2}_{K} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2}_{K} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2}_{K} = (n-1)K \tag{10}$$

V tem primeru so natančnosti ostalih $n-1$ opazovanj σ_{x_i} $(i = 2, \ldots, n)$ določene kot:

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{\tilde{\sigma}_y^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (n-1)} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{x_i} = \frac{\tilde{\sigma}_y}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \sqrt{n-1}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{11}$$

Postopek je enak tudi v primeru, ko imamo podane natančnosti kakega drugega opazovanja, oziroma tudi, ko imamo več kot eno podano natančnost opazovanj. Če imamo torej

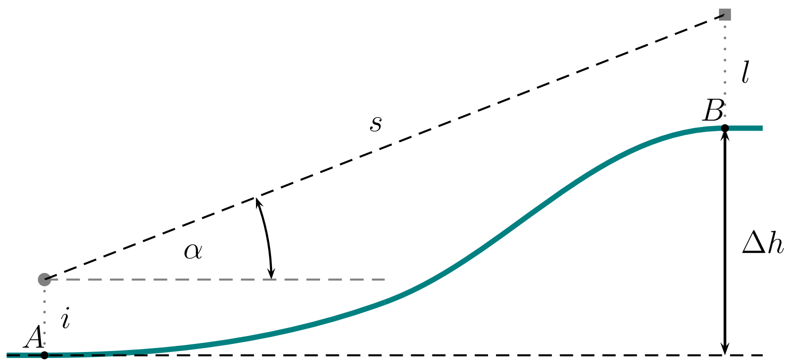
n opazovanj, od katerih imamo za k ($k < n$) opazovanj podane standardne odklone (σ_{x_j}, $j = 1, 2, \ldots, k$), potem prvo izračunamo varianco $\tilde{\sigma}_y^2$ kot:

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \sqrt{\sigma_y^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 - \cdots - \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_{x_k}^2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\sigma}_y = \sqrt{\tilde{\sigma}_y^2} \tag{12}$$

in se za i-to opazovanje enačba 11 preoblikuje v:

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{\tilde{\sigma}_y}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \sqrt{n-k}} \qquad (i = k+1, k+2, \ldots, n) \tag{13}$$

1.2 Primer naloge – Trigonometrično višinomerstvo



Slika 1: Poenostavljen prikaz trigonometričnega višinomerstva

Določiti želimo višino točke B, pri tem da bi izhajali iz dane višine reperja A ($H_A = 320.0\,\mathrm{m}$), višinsko razliko Δh pa bi določili s trigonometričnim višinomerstvom. Znane so približne vrednosti opazovanj, in sicer:

$$s = 400\,\mathrm{m} \qquad \alpha = 30^\circ \tag{14}$$

Višino (H_B) točke B želimo določiti z natančnostjo $\sigma_{H_B} = 1.0\,\mathrm{cm}$. Izračunajte:

1. potrebne natančnosti (standardne odklone) opazovanj s, α, i, l, če predpostavimo uravnotežene natančnosti opazovanj,
2. potrebne natančnosti (standardne odklone) opazovanj s, i, l, če imamo natančnost merjenega kota α podano ($\sigma_\alpha = 5''$),
3. potrebne natančnosti (standardne odklone) opazovanj s, α, i, l, če predpostavimo uravnotežene natančnosti opazovanj in imamo podano natančnost višine točke A ($\sigma_{H_A} = 5\,\mathrm{mm}$) in
4. potrebne natančnosti (standardne odklone) opazovanj s, α, i, l, če predpostavimo uravnotežene natančnosti opazovanj in imamo podano natančnost višine točke A ($\sigma_{H_A} = 15\,\mathrm{mm}$).

1.3 Rešitev alineje 1

Izračun višine H_B točke B je določena z:

$$H_B = H_A + s \sin \alpha + i - l \tag{15}$$

Izračun natančnosti σ_{H_B} višine točke B po zakonu o prenosu varianc in kovarianc pa je podana kot:

$$\sigma_{H_B}^2 = \left(\frac{\partial H_B}{\partial H_A}\right)^2 \sigma_{H_A}^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial i}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 \tag{16}$$

Ker je višina točke A dana, to pomeni, da velja $\sigma_{H_A} = 0.0\,\mathrm{m}$. Poleg tega je razvidno, da v enačbi 15 nastopajo $n = 4$ opazovanja (s, α, i in l). Enačbo 16 lahko preuredimo v:

$$\sigma_{H_B}^2 = \left(\frac{\partial H_B}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial i}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 \tag{17}$$

Če odvajamo enačbo 15 po vseh opazovanjih in za izračun uporabimo njihove približne vrednosti, dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_B}{\partial s} &= \sin\alpha = 0.50 & \frac{\partial H_B}{\partial \alpha} &= s\cos\alpha = 346.410\,\mathrm{m} \\ \frac{\partial H_B}{\partial i} &= 1.0 & \frac{\partial H_B}{\partial l} &= -1.0 \end{aligned} \tag{18}$$

Enačbo 17 tako lahko v skladu s parcialnimi odvodi v enačbah 18 zapišemo kot:

$$\sigma_{H_B}^2 = (0.50)^2\,\sigma_s^2 + (346.410\,\mathrm{m})^2\,\sigma_\alpha^2 + (1.0)^2\,\sigma_i^2 + (-1.0)^2\,\sigma_l^2 \tag{19}$$

Izračun potrebne natančnosti posameznega opazovanja na koncu dobimo kot:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\sigma_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial s}\right|\sqrt{n}} = \frac{0.01\,\mathrm{m}}{0.50\sqrt{4}} = 0.010\,\mathrm{m} \\ \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial \alpha}\right|\sqrt{n}} = \frac{0.01\,\mathrm{m}}{346.41\,\mathrm{m}\sqrt{4}} = 1.44\times10^{-5} = 3.0'' \\ \sigma_i &= \frac{\sigma_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial i}\right|\sqrt{n}} = \frac{0.01\,\mathrm{m}}{1.00\sqrt{4}} = 0.005\,\mathrm{m} \\ \sigma_l &= \frac{\sigma_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial l}\right|\sqrt{n}} = \frac{0.01\,\mathrm{m}}{1.00\sqrt{4}} = 0.005\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{20}$$

Natančnosti opazovanj iz enačb 20 so izračunane tako, da po prenosu varianc in kovarianc iz enačbe 19 dajo natančnost $\sigma_{H_B} = 0.01\,\mathrm{m}$. Tako lahko vidimo, da izračunane natančnosti opazovanj podajajo le mejne vrednosti natančnosti, da zadostimo kriteriju $\sigma_{H_B} = 0.01\,\mathrm{m}$.

1.4 Rešitev alineje 2

V drugem primeru imamo v naprej podano natančnost merjenega kota α, in sicer $\sigma_\alpha = 5''$. Enačbo za prenos varianc in kovarianc 16 lahko sedaj zapišemo kot:

$$\sigma_{H_B}^2 = \left(\frac{\partial H_B}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial \alpha}\right)^2 \underbrace{\sigma_\alpha^2}_{DANO} + \left(\frac{\partial H_B}{\partial i}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 \tag{21}$$

Enačbo 21 lahko sedaj preuredimo tako, da znane količine damo na levo stran, neznane pa na desno:

$$\sigma_{H_B}^2 - \left(\frac{\partial H_B}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 = \left(\frac{\partial H_B}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial i}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial H_B}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 \tag{22}$$

Prvo izračunajmo varianco $\tilde{\sigma}^2_{H_B}$ na levi strani enačbe 22 kot:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2_{H_B} =& \sigma^2_{H_B} - \left(\frac{\partial H_B}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma^2_\alpha = 2.949 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2 \\
\tilde{\sigma}_{H_B} =& 0.0054\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

V enačbi 22 vidimo, da imamo v tem primeru samo še $n = 3$ opazovanja (s, i in l), kjer potrebne natančnosti opazovanj izračunamo kot:

$$
\begin{aligned}
\sigma_s =& \frac{\tilde{\sigma}_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial s}\right|\sqrt{n}} = \frac{0.0054\,\mathrm{m}}{0.50\sqrt{3}} = 0.0063\,\mathrm{m} \\
\sigma_i =& \frac{\tilde{\sigma}_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial i}\right|\sqrt{n}} = \frac{0.0054\,\mathrm{m}}{1.00\sqrt{3}} = 0.0031\,\mathrm{m} \\
\sigma_l =& \frac{\tilde{\sigma}_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial l}\right|\sqrt{n}} = \frac{0.0054\,\mathrm{m}}{1.00\sqrt{3}} = 0.0031\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Če imamo podano natančnost merjenega kota $\sigma_\alpha = 5''$ in ostala opazovanja izmerimo z natančnostmi, kot so prikazane v enačbi 24, potem bomo spet dobili natančnost $\sigma_{H_B} = 0.01\,\mathrm{m}$.

1.5 Rešitev alineje 3

V tem primeru imamo podano natančnost višine točke A kot $\sigma_{H_A} = 5\,\mathrm{mm}$. Tudi tu izhajamo iz enačbe 15, le da sedaj višine H_A ne izločimo iz prenosa varianc in kovarianc. Dobimo:

$$
\sigma^2_{H_B} = \sigma^2_{H_A} + (\sin\alpha)^2\,\sigma^2_s + (s\cos\alpha)^2\,\sigma^2_\alpha + \sigma^2_i + \sigma^2_l \tag{25}
$$

Ker imamo natančnost σ_{H_A} podano, jo damo na levo stran:

$$
\sigma^2_{H_B} - \sigma^2_{H_A} = (\sin\alpha)^2\,\sigma^2_s + (s\cos\alpha)^2\,\sigma^2_\alpha + \sigma^2_i + \sigma^2_l \tag{26}
$$

Tudi tu levo stran enačbe izračunajmo:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2_{H_B} =& \sigma^2_{H_B} - \sigma^2_{H_A} = 7.500 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^2 \\
\tilde{\sigma}_{H_B} =& 0.0087\,\mathrm{m}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Na desni strani imamo tako $n = 4$ opazovanja, kjer potrebne natančnosti vseh geodetskih opazovanj izračunamo kot:

$$
\begin{aligned}
\sigma_s =& \frac{\tilde{\sigma}_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial s}\right| \sqrt{n}} = \frac{0.0087\,\mathrm{m}}{0.50\sqrt{4}} = 0.0087\,\mathrm{m} \\
\sigma_\alpha =& \frac{\tilde{\sigma}_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial \alpha}\right| \sqrt{n}} = \frac{0.0087\,\mathrm{m}}{346.41\,\mathrm{m}\sqrt{4}} = 1.25 \times 10^{-5} = 2.6'' \\
\sigma_i =& \frac{\tilde{\sigma}_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial i}\right| \sqrt{n}} = \frac{0.0087\,\mathrm{m}}{1.00\sqrt{4}} = 0.0043\,\mathrm{m} \\
\sigma_l =& \frac{\tilde{\sigma}_{H_B}}{\left|\frac{\partial H_B}{\partial l}\right| \sqrt{n}} = \frac{0.0087\,\mathrm{m}}{1.00\sqrt{4}} = 0.0043\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{28}
$$

1.6 Rešitev alineje 4

Vidimo lahko, da je zadnja alineja praktično identična predhodni, razlika je le v tem, da smo pri prejšnjem reševanju imeli $\sigma_{H_A} = 5\,\mathrm{mm}$, medtem ko imamo tu $\sigma_{H_A} = 15\,\mathrm{mm}$. Celoten potek je enak kot v poglavju 1.5, sprememba se pojavi le pri enačbi 27, ki je sedaj oblike:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2_{H_B} =& \sigma^2_{H_B} - \sigma^2_{H_A} = -1.250 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\
\tilde{\sigma}_{H_B} =& \sqrt{-1.250 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = ?
\end{aligned} \tag{29}
$$

V enačbi 29 dobimo negativno varianco $\tilde{\sigma}^2_{H_B}$, ki jo je za potrebe izračuna potrebnih natančnosti iz enačbe 28 potrebno koreniti. Ker vemo, da varianca nikoli ne more biti negativna, se izračun tu ustavi. A kaj to pomeni? Pomeni lahko le eno. Če imamo podano natančnost izhodiščnega reperja kot $\sigma_{H_A} = 15\,\mathrm{mm}$, želimo pa določiti natančnost končnega reperja kot $\sigma_{H_B} = 1.0\,\mathrm{cm}$, tega ne moremo nikoli doseči. Natančnost izhodiščnega reperja je povsem preslaba, da bi lahko dobili zahtevano natančnost končnega reperja. Rešitev seveda je, da izhajamo iz novega reperja.

Enak rezultat bi dobili, če bi uporabili inštrumentarij, ki lahko izmeri dolžine z natančnostjo npr. $\sigma_s = 5.0\,\mathrm{cm}$. Tudi v tem primeru bi dobili varianco $\tilde{\sigma}^2_{H_B}$ negativno in povsem enako bi morali dolžino določiti drugače (drug inštrumentarij ali večkrat ponoviti izmero dolžine s tem inštrumentom).