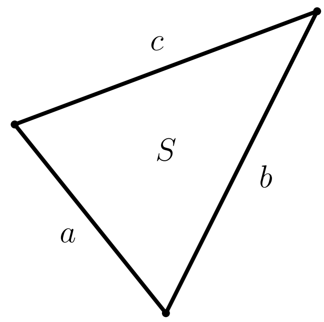
Potrebna natančnost geodetskih opazovanj – Površina parcele trikotne oblike (merjene stranice)

Površino S parcele trikotne oblike moramo določiti z natančnostjo $\sigma_S = 0.1\,\mathrm{m}^2$, pri tem da bi opazovali vse tri stranice a, b in c, kot to prikazuje slika 1. S kakšno natančnostjo moramo izmeriti vse tri stranice σ_a, σ_b in σ_c, da bomo površino parcele dobili z zahtevano natančnostjo? Približne vrednosti stranic so $a = 40\,\mathrm{m}$, $b = 60\,\mathrm{m}$ in $c = 70\,\mathrm{m}$.



Slika 1: Določitev površine iz merjenih stranic trikotnika

S konceptualnega vidika naloga ni nič posebnega, pri samo eni stvari se bomo ustavili, in sicer pri parcialnih odvodih. Iz naloge pa vidimo, da moramo površino S izračunati iz stranic trikotnika, torej $n =$ ___. Iz osnovne trigonometrije vemo, da velja:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \_\_\_\,\mathrm{m}^2 \tag{1}$$

kjer količina s v enačbi 1 predstavlja $s = \frac{a+b+c}{2} = 85.00\,\mathrm{m}$. Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc velja:

$$\sigma_S^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 \tag{2}$$

Parcialni odvodi iz enačbe 2 imajo vrednosti:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \_\_\_\_\_\,\mathrm{m} \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = \_\_\_\_\_\,\mathrm{m} \qquad \frac{\partial S}{\partial c} = \_\_\_\_\_\,\mathrm{m} \tag{3}$$

A ključno vprašanje tu je, kako parcialne odvode izračunati. Se vam zdijo težki? Ali obstaja obvod? Pa poglejmo, ali obstaja numerični način za izračun odvodov funkcije. Izkaže se, da seveda obstaja[1]. Primer, prvi parcialni odvod iz enačbe 3 lahko izračunamo tudi takole:

$$\frac{\partial S}{\partial a} \approx \frac{S(a+h,b,c) - S(a-h,b,c)}{2h} \tag{4}$$

V enačbi 4 količina h predstavlja prirastek spremenljivke, in če si izberete $h = 0.1\,\mathrm{m}$, potem bo razlika v izračunanem odvodu iz enačbe 3 (pravilen izračun) in drugemu, iz

[1]poglejte recimo tole: https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_differentiation

enačbe 4, enaka -4.9×10^{-6} m. Razlika je zanemarljiva in ne vpliva na rezultate. Seveda, ker pa je funkcija izračuna površine S iz enačbe 1 zvezna in gladka, to pomeni, da parcialni odvodi funkcije obstajajo. Lahko se pokaže, npr. da je:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{S}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right) \tag{5}$$

Parcialna odvoda po stranicah b in c bosta zelo podobna kot parcialni odvod po a iz enačbe 5 (kaj mislite, da se spremeni, če odvajamo po npr. b?).
Ko imamo parcialne odvode izračunane, moramo izračunati le še potrebne natančnosti vseh treh opazovanj σ_a, σ_b in σ_c, kar dobimo kot:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_S}{\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right|\sqrt{n}} = \_\_\_\_\_\text{mm} \qquad \sigma_b = \frac{\sigma_S}{\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|\sqrt{n}} = \_\_\_\_\_\text{mm} \qquad \sigma_c = \frac{\sigma_S}{\left|\frac{\partial S}{\partial c}\right|\sqrt{n}} = \_\_\_\_\_\text{mm} \tag{6}$$