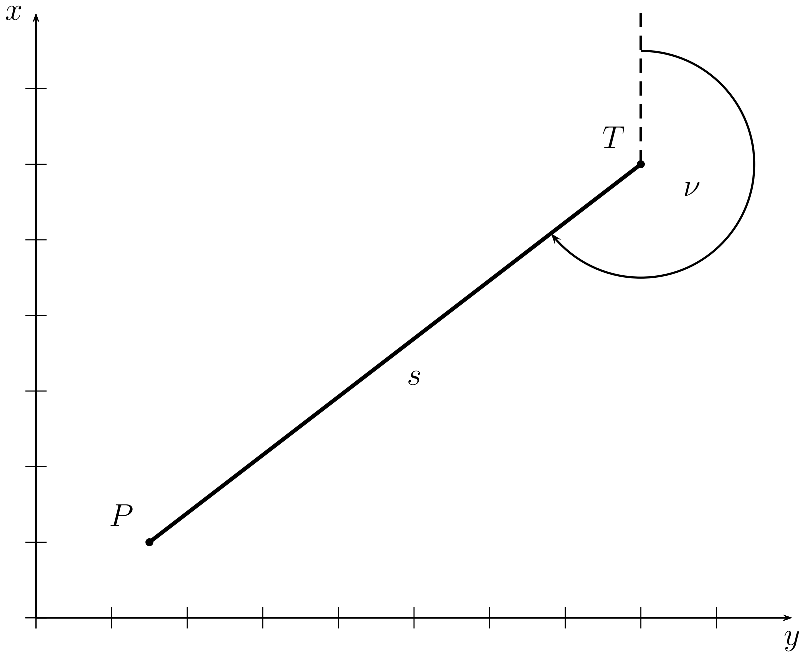
Potrebna natančnost geodetskih opazovanj – Polarna izmera

Koordinate točke P želimo določiti z natančnostjo koordinat $\sigma_{y_P} = \sigma_{x_P} = 2.0\,\mathrm{cm}$, izhajali bi pa z dane točke $T(y_T, x_T) = (35\,125\,\mathrm{m}, 115\,860\,\mathrm{m})$, koordinate točke P pa bi določili s polarno izmero, kjer bi izmerili smerni kot ν in dolžino s, kot to prikazuje slika 1. Izračunaj, s kakšno natančnostjo moramo izmeriti obe opazovanji, da dobimo koordinate točke P z zahtevano natančnostjo. Približni vrednosti opazovanj sta $s = 1000.0\,\mathrm{m}$ in $\nu = 200°$.

Kako bi lahko v splošnem izračunali natančnost meritev pri polarni izmeri?



Slika 1: Opazovanja pri polarni izmeri

Izračun rešitev naloge

Pri nalogi bomo postopali enako, kot pri nalogi *Naloga1_gKartPolar.pdf*, saj je tudi tu več neznank, zato bomo računali potrebne natančnosti opazovanj za vsako posebej. Razlika je le, da bomo tu rezultate zapisali skopaj. Vidimo, da pri obeh neznankah potrebujemo $n =$ ___ opazovanj, stranico s in smerni kot ν. Izračun koordinat y_P in x_P točke P izhaja iz osnovnih enačb polarnega geodetskega koordinatnega sistema:

$$\begin{aligned} y_P &= y_T + s \sin\nu = \underline{\quad}\,\mathrm{m} \\ x_P &= x_T + s \cos\nu = \underline{\quad}\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1}$$

Izračun natančnosti koordinat točke P na osnovi zakona o prenosu varianc in kovarianc pa je:

$$\begin{aligned}\sigma_{y_P}^2 &= \left(\frac{\partial y_P}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial y_P}{\partial \nu}\right)^2 \sigma_\nu^2 \\ \sigma_{x_P}^2 &= \left(\frac{\partial x_P}{\partial s}\right)^2 \sigma_s^2 + \left(\frac{\partial x_P}{\partial \nu}\right)^2 \sigma_\nu^2\end{aligned} \tag{2}$$

kjer so parcialni odvodi iz enačbe 2 izpeljani na osnovi enačbe 1 in imajo vrednosti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_P}{\partial s} &= \underline{\qquad} & \frac{\partial y_P}{\partial \nu} &= \underline{\qquad}\,\mathrm{m} \\ \frac{\partial x_P}{\partial s} &= \underline{\qquad} & \frac{\partial x_P}{\partial \nu} &= \underline{\qquad}\end{aligned} \tag{3}$$

Potrebni natančnosti obeh opazovanj, a za obe koordinati (izračunano ločeno), sta:

$$\begin{aligned} y_P: \quad & \sigma_s = \frac{\sigma_{y_P}}{\left|\frac{\partial y_P}{\partial s}\right|\sqrt{n}} = \underline{\qquad}\,\mathrm{cm} & \sigma_\nu = \frac{\sigma_{y_P}}{\left|\frac{\partial y_P}{\partial \nu}\right|\sqrt{n}} = \underline{\qquad}'' \\ x_P: \quad & \sigma_s = \frac{\sigma_{x_P}}{\left|\frac{\partial x_P}{\partial s}\right|\sqrt{n}} = \underline{\qquad}\,\mathrm{cm} & \sigma_\nu = \frac{\sigma_{x_P}}{\left|\frac{\partial x_P}{\partial \nu}\right|\sqrt{n}} = \underline{\qquad}''\end{aligned} \tag{4}$$

Določitev natančnosti koordinat splošno

Pri splošni oceni natančnosti opazovanj v primeru polarne izmere, nas zanima kako natančno je potrebno izmeriti obe opazovanji v splošnem, ko torej nimamo podatka o koordinatah dane točke in o približnih vrednostih opazovanj. Izhajamo iz zakona o prenosu varianc in kovarianc za izračun natančnosti koordinat točke P iz enačbe 2, kamor damo parcialne odvode (analitična rešitev) iz enačbe 3. Dobimo:

$$\begin{aligned}\sigma_{y_P}^2 &= (\sin\nu)^2 \sigma_s^2 + (s\cos\nu)^2 \sigma_\nu^2 \\ \sigma_{x_P}^2 &= (\cos\nu)^2 \sigma_s^2 + (-s\sin\nu)^2 \sigma_\nu^2\end{aligned} \tag{5}$$

Iz enačbe 5 vidimo, da je natančnost obeh koordinat odvisna tako od dolžine s kot tudi od smernega kota ν. Če pri podanih natančnostih opazovanj (σ_s in σ_ν) skušamo ugotoviti, v katerih primerih bomo dobili najslabše natančnosti koordinat točke P, bomo ugotovili, da to velja takrat, ko bi veljalo $|\sin\nu| = 1$ in $|\cos\nu| = 1$. Ne glede na to, da to istočasno ne more veljati (da sta sin in cos enaka 0), poenostavimo enačbi 5 točno tako, da zapišemo $|\sin\nu| = 1$ in $|\cos\nu| = 1$. S tem dobimo pesimistično oceno natančnosti koordinat točke P, ki se zapišejo kot:

$$\begin{aligned}\sigma_{y_P}^2 &= \sigma_s^2 + s^2\sigma_\nu^2 \\ \sigma_{x_P}^2 &= \sigma_s^2 + s^2\sigma_\nu^2\end{aligned} \tag{6}$$

Enačba 6 nam predstavlja zelo dobro orodje za analizo vpliva natančnosti merjene dolžine s in opazovanjega smernega kota ν za določitev koordinat točke P, kjer pa se ne osredotočamo samo na polarno izmero. Tu gre za vsako vrsto kombinirane izmere, ko merimo tako kote kot tudi dolžine. V enačbi 6 si podamo končno natančnost koordinat, npr $\sigma_{y_P} = \sigma_{x_P} = 2.0\,\mathrm{cm}$ in analiziramo, kako natančno moramo izmeriti s in ν, da podanemu pogoju na koncu zadostimo. Iz enačbe vidimo, da bo natančnost dolžine σ_s neodvisna

od razdalje med točkama. Po drugi strani, pa vpliv natančnosti kota σ_ν raste linearno z oddaljenostjo med točkama. Kaj to pomeni? Pri majhnih razdaljah je lahko standardni odklon σ_ν velik (slaba natančnost kota), a še vedno lahko dobimo visoko kakovost koordinat. Pri velikih razdaljah, pa moramo zagotoviti izredno visoko natančnost kota, da zadostimo visoki natančnosti koordinat.
Kaj vse to pomeni? Pri zelo kratkih razdaljah zato visoko natančnost koordinat lažje dobimo z merjenimi koti, kot z merjenimi dolžinami. Primer, pri dolžini $s = 30\,\mathrm{m}$ in natančnosti kota $\sigma_\nu = 1''$ dobimo $\sigma_{y_P} = 0.2\,\mathrm{mm}$. Ko pa so razdalje zelo velike (npr. več 10 km) pa se nam izplača meriti samo dolžine, saj nam natančnost kota lahko naredi preveliko napako, pri dolžini $s = 30\,\mathrm{km}$ in natančnosti kota $\sigma_\nu = 1''$ dobimo $\sigma_{y_P} = 15\,\mathrm{cm}$.