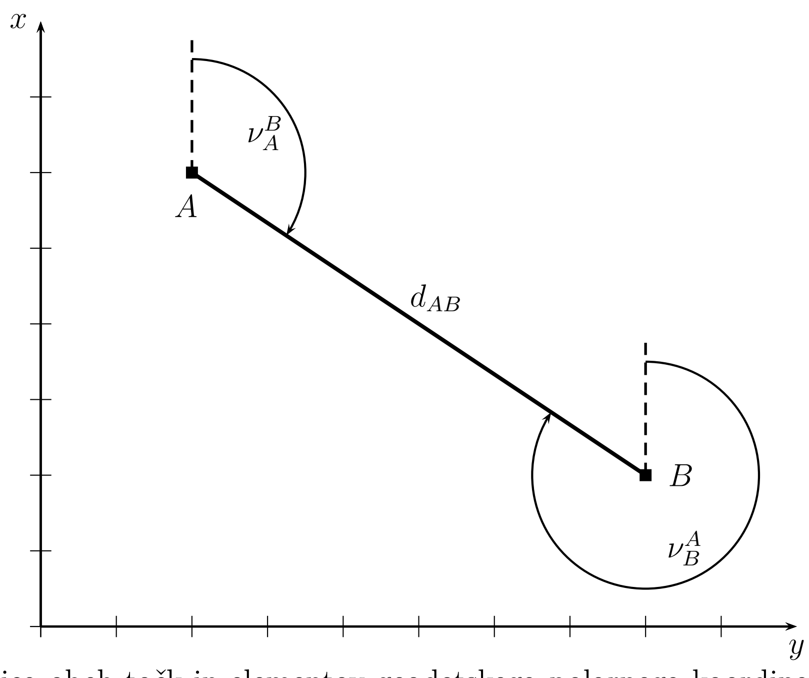
Potrebna natančnost geodetskih opazovanj – Geodetski polarni in kartezični koordinatni sistem:

Med dvema točkama, A in B, v državnem koordinatnem sistemu želimo določiti vse elemente geodetskega polarnega koordinatnega sistema, in sicer dolžino d_{AB} in oba smerna kota ν_A^B ter ν_B^A. Izračunaj, s kakšno natančnostjo moramo imeti podane koordinate obeh točk, to so σ_{y_A}, σ_{x_A}, σ_{y_B} in σ_{x_B}, če želimo določiti:

- dolžino d_{AB} z natančnostjo $\sigma_{d_{AB}} = 1.0\,\mathrm{cm}$,
- smerni kot ν_A^B z natančnostjo $\sigma_{\nu_A^B} = 10.0''$ in
- smerni kot ν_B^A z natančnostjo $\sigma_{\nu_B^A} = 10.0''$.

Približne koordinate obeh točk so: $A(y_A, x_A) = (461\,300.0\,\mathrm{m}, 100\,600.0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (461\,500.0\,\mathrm{m}, 100\,500.0\,\mathrm{m})$.
Kako bi lahko določili splošne natančnosti koordinat dveh točk, pri podanih pogojih natančnosti $\sigma_{d_{AB}}$, $\sigma_{\nu_A^B}$ in $\sigma_{\nu_B^A}$, če koordinat točk ne poznamo?



Slika 1: Skica obeh točk in elementov geodetskega polarnega koordinatnega sistema

Določitev dolžine d_{AB} z natančnostjo $\sigma_{d_{AB}} = 1.0\,\mathrm{cm}$

Iz navodil naloge vidimo, da moramo izračunati potrebne natančnosti $n =$ ___ opazovanj, in sicer natančnosti koordinat obeh točk, torej σ_{y_A}, σ_{x_A}, σ_{y_B} in σ_{x_B}. Prvo zapišimo, kako se izračuna dolžina d_{AB} in njeno vrednost, izračunano iz približnih koordinat:

$$d_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \underline{\qquad}\,\mathrm{m} \tag{1}$$

Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc, je varianca $\sigma^2_{d_{AB}}$ dolžine d_{AB} določena kot:

$$\sigma^2_{d_{AB}} = \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A}\right)^2 \sigma^2_{y_A} + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A}\right)^2 \sigma^2_{x_A} + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B}\right)^2 \sigma^2_{y_B} + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B}\right)^2 \sigma^2_{x_B} \tag{2}$$

Parcialne odvode iz enačbe 2 dobimo na osnovi enačbe 1 in imajo vrednosti (izpeljite jih sami za vajo):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A}\right) &= \_\_\_\_ & \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A}\right) &= \_\_\_\_ \\ \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B}\right) &= \_\_\_\_ & \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B}\right) &= \_\_\_\_ \end{aligned} \tag{3}$$

Potrebne natančnosti koordinat σ_{y_A}, σ_{x_A}, σ_{y_B} in σ_{x_B} dobimo kot:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_A} &= \frac{\sigma_{d_AB}}{\left|\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\text{cm} & \sigma_{x_A} &= \frac{\sigma_{d_AB}}{\left|\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\text{cm} \\ \sigma_{y_B} &= \frac{\sigma_{d_AB}}{\left|\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\text{cm} & \sigma_{x_B} &= \frac{\sigma_{d_AB}}{\left|\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\text{cm} \end{aligned} \tag{4}$$

Določitev smernega kota ν_A^B z natančnostjo $\sigma_{\nu_A^B} = 10.0''$

Tudi smerni kot ν_A^B se izračuna iz $n =$ ___ opazovanj, in sicer kot:

$$\nu_A^B = \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \_\_\_^\circ \_\_\_' \_\_\_'' \tag{5}$$

Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc, je varianca $\sigma^2_{\nu_A^B}$ smernega kota ν_A^B določena kot:

$$\sigma^2_{\nu_A^B} = \left(\frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A}\right)^2 \sigma^2_{y_A} + \left(\frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A}\right)^2 \sigma^2_{x_A} + \left(\frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B}\right)^2 \sigma^2_{y_B} + \left(\frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B}\right)^2 \sigma^2_{x_B} \tag{6}$$

Parcialne odvode iz enačbe 6 dobimo na osnovi enačbe 5 in imajo vrednosti (tudi te izpeljite sami za vajo):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A}\right) &= \_\_\_\_\text{m}^{-1} & \left(\frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A}\right) &= \_\_\_\_\text{m}^{-1} \\ \left(\frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B}\right) &= \_\_\_\_\text{m}^{-1} & \left(\frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B}\right) &= \_\_\_\_\text{m}^{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

Potrebne natančnosti koordinat σ_{y_A}, σ_{x_A}, σ_{y_B} in σ_{x_B} dobimo kot:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_A} &= \frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\left|\frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\text{cm} & \sigma_{x_A} &= \frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\left|\frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\text{cm} \\ \sigma_{y_B} &= \frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\left|\frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\text{cm} & \sigma_{x_B} &= \frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\left|\frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\text{cm} \end{aligned} \tag{8}$$

Določitev smernega kota ν_B^A z natančnostjo $\sigma_{\nu_B^A} = 10.0''$

Smerni kot ν_B^A predstavlja samo obratni smerni kot kota ν_A^B, zato tu prikažemo samo rezultate. Velikost smernega kota ν_B^A je:

$$\nu_B^A = \nu_A^B + 180^\circ = \arctan \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \_\_^\circ\_\_'\_\_'' \tag{9}$$

Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc, je varianca $\sigma^2_{\nu_A^B}$ smernega kota ν_A^B določena kot:

$$\sigma^2_{\nu_A^B} = \left(\frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A}\right)^2 \sigma^2_{y_A} + \left(\frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A}\right)^2 \sigma^2_{x_A} + \left(\frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B}\right)^2 \sigma^2_{y_B} + \left(\frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B}\right)^2 \sigma^2_{x_B} \tag{10}$$

Parcialne odvode iz enačbe 10 dobimo na osnovi enačbe 9 in imajo vrednosti (tudi te izpeljite sami za vajo):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A}\right) &= \_\_\_\_\mathrm{m}^{-1} & \left(\frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A}\right) &= \_\_\_\_\mathrm{m}^{-1} \\ \left(\frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B}\right) &= \_\_\_\_\mathrm{m}^{-1} & \left(\frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B}\right) &= \_\_\_\_\mathrm{m}^{-1} \end{aligned} \tag{11}$$

Potrebne natančnosti koordinat σ_{y_A}, σ_{x_A}, σ_{y_B} in σ_{x_B} dobimo kot:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_A} &= \frac{\sigma_{\nu_B^A}}{\left|\frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\mathrm{cm} & \sigma_{x_A} &= \frac{\sigma_{\nu_B^A}}{\left|\frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\mathrm{cm} \\ \sigma_{y_B} &= \frac{\sigma_{\nu_B^A}}{\left|\frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\mathrm{cm} & \sigma_{x_B} &= \frac{\sigma_{\nu_B^A}}{\left|\frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B}\right| \sqrt{n}} = \_\_\_\_\mathrm{cm} \end{aligned} \tag{12}$$

Določitev natančnosti koordinat splošno

Rezultati ocenjenih potrebnih natančnosti koordinat pri določitvi dolžine d_{AB} in obeh smernih kotov ν_A^B in ν_B^A nakazujejo na razmislek. Vidimo, da pri vseh treh primerih dobimo isto potrebno natančnost za koordinati y_A in y_B in isti za x_A in x_B. Glede samih numeričnih vrednosti, pa bi bilo zanimivo videti, kako se le-te spreminjajo v odvisnosti od same geometrije problema, torej kako na potrebno natančnost koordinat vpliva razdalja med točkama in orientacija med točkama.
Obrnimo nalogo in s prenosom pravih pogreškov izračunajmo natančnost dolžine $\sigma_{d_{AB}}$ in smernega kota $\sigma_{\nu_A^B}$ pri tem, da imamo vse koordinate enake natančnosti, torej:

$$\sigma_{y_A} = \sigma_{x_A} = \sigma_{y_B} = \sigma_{x_B} = \sigma_k \tag{13}$$

Zakon o prenosu varianc in kovarianc za dolžino d_{AB} je zapisan v enačbi 2, ki ga skladno z enačbo 13 zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{d_{AB}} &= \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A}\right)^2 \sigma^2_{y_A} + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A}\right)^2 \sigma^2_{x_A} + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B}\right)^2 \sigma^2_{y_B} + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B}\right)^2 \sigma^2_{x_B} \\ &= \sigma_k^2 \left(\left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B}\right)^2 + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B}\right)^2 \right) \end{aligned} \tag{14}$$

Glede na obliko parcialnih odvodov dolžine d_{AB} po vseh koordinatah (preverite sami), se enačba 14 poenostavi v:

$$\sigma_{d_{AB}}^2 = 2\sigma_k^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_{d_{AB}} = \sqrt{2}\sigma_k \tag{15}$$

Podobno lahko izpeljemo tudi za smerni kot $\sigma_{\nu_A^B}$. Tudi v tem primeru lahko enačbo 6 poenostavimo zaradi oblike parcialnih odvodov (preverite sami), kjer bi dobili:

$$\sigma_{\nu_A^B}^2 = 2\frac{\sigma_k^2}{d_{AB}^2} \quad \rightarrow \quad \sigma_{\nu_A^B} = \sqrt{2}\frac{\sigma_k}{d_{AB}} \tag{16}$$

Ob podanih natančnostih dolžine $\sigma_{d_{AB}}$ ali smernega kota $\sigma_{\nu_A^B}$ so potrebne natančnosti koordinat σ_k enake:

- pri podani natančnosti dolžine d_{AB}:

$$\sigma_k = \frac{\sigma_{d_{AB}}}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

- pri podani natančnosti smernega kota ν_A^B:

$$\sigma_k = d_{AB}\frac{\sigma_{\nu_A^B}}{\sqrt{2}} \tag{18}$$

Kaj nam prikazujeta enačbi 17 in 18? Na natančnost dolžine ne vpliva geometrija točk (oddaljenost in orientacija), medtem ko na natančnost smernega kota vpliva razdalja med točkama, in sicer obratno sorazmerno.