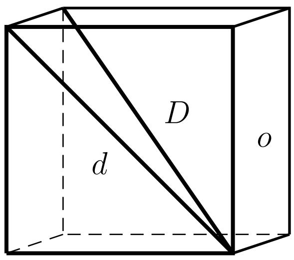
ZAKON O PRENOSU VARIANC IN KOVARIANC PRI MNK

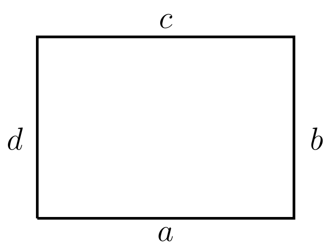
1. V kocki smo izmerili tri količine, in sicer: ploskovno diagonalo ($d = 14.0\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo ($D = 17.0\,\mathrm{m}$) in obseg osnovne ploskve ($o = 40.0\,\mathrm{m}$). S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja, če sta obe diagonali (d in D) korelirani, saj velja $\rho_{dD} = -0.5$. Izračunaj velikost osnovne ploskve a in njeno natančnost σ_a. Izračunaj tudi prostornino kocke V in njeno natančnost σ_V.



Slika 1: Naloga 1

REŠITEV: $a = 9.943\,\mathrm{m}$, $\sigma_a = 5.2\,\mathrm{cm}$, $\hat{\sigma}_0 = 0.265\,\mathrm{m}$, $v_d = 6.2\,\mathrm{cm}$, $v_D = 22.2\,\mathrm{cm}$, $v_o = -22.7\,\mathrm{cm}$, $V = 983.03\,\mathrm{m}^3$, $\sigma_V = 15.5\,\mathrm{m}^3$.

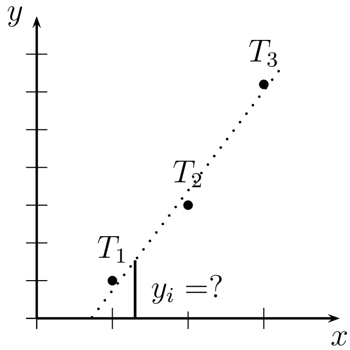
2. V pravokotniku smo izmerili vse stranice in dobili: $a = 15.0\,\mathrm{m}$, $b = 10.0\,\mathrm{m}$, $c = 14.9\,\mathrm{m}$ in $d = 10.1\,\mathrm{m}$. S posredno in pogojno izravnavo izravnajte opazovanja in določite: osnovno stranico A, površino S, njuni natančnosti σ_A in σ_S in korelacijo ρ_{AS}. Namig: za neznanki nastavite A in S.



Slika 2: Naloga 2

REŠITEV: $A = 14.95\,\mathrm{m}$, $S = 150.25\,\mathrm{m}^2$, $\hat{a} = \hat{c} = A = 14.95\,\mathrm{m}$, $\hat{b} = \hat{d} = 10.05\,\mathrm{m}$, $\hat{\sigma}_0 = 7.1\,\mathrm{cm}$, $\sigma_A = 5.0\,\mathrm{cm}$, $\sigma_S = 0.9\,\mathrm{m}^2$, $\rho_{AS} = 0.55$.

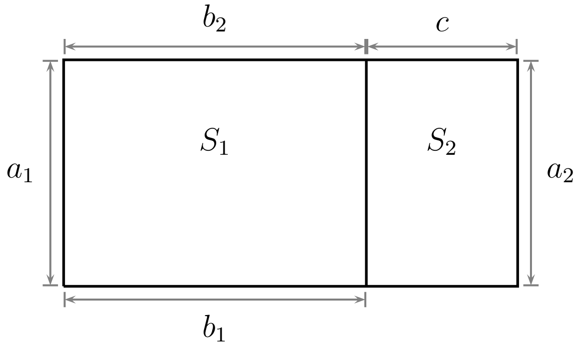
3. V ravnini smo trem točkam izmerili koordinate y (koordinate x so dane) in dobili: $T_1(x_1, y_1) = (1.0, 1.0)$, $T_2(x_2, y_2) = (2.0, 3.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (3.0, 5.1)$. Če so opazovanja enake natančnosti, s posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice (parametra a in b), ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj natančnosti parametrov premice σ_a in σ_b ter korelacijo ρ_{ab}, izračunaj tudi izravnana opazovanja, njihove natančnosti in medsebojne korelacije. Izračunaj tudi, kakšna je vrednost koordinate y_i pri vrednosti koordinate $x_i = 1.3$ in njena natančnost σ_{y_i}.



Slika 3: Naloga 3

REŠITEV: $a = 2.05$, $b = -1.067$, $\sigma_a = 0.029$, $\sigma_b = 0.062$, $\rho_{ab} = -0.93$, $\hat{y}_1 = 0.983$, $\hat{y}_2 = 3.033$, $\hat{y}_3 = 5.083$, $\sigma_{\hat{y}_1} = 0.037$, $\sigma_{\hat{y}_2} = 0.024$, $\sigma_{\hat{y}_3} = 0.37$, $\rho_{\hat{y}_1\hat{y}_2} = 0.63$, $\rho_{\hat{y}_1\hat{y}_3} = -0.20$, $\rho_{\hat{y}_2\hat{y}_3} = 0.63$, $y_i = 1.5983$, $\sigma_{y_i} = 0.031$.

4. Parcela je sestavljena iz dveh delov, kot prikazuje slika. Da bi določili površini obeh delov (S_1 in S_2) smo izmerili 5 stranic, in sicer: $a_1 = 35.0\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{a_1} = 0.1\,\mathrm{m}$), $a_2 = 35.1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{a_2} = 0.2\,\mathrm{m}$), $b_1 = 20.0\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{b_1} = 0.2\,\mathrm{m}$), $b_2 = 19.8\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{b_2} = 0.1\,\mathrm{m}$) in $c = 10.0\,\mathrm{m}$ ($\sigma_c = 0.1\,\mathrm{m}$). S pogojno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja, določi velikost osnovnih stranic a, b in c, njihove natančnosti in korelacije. Določi tudi določi površini S_1 in S_2, njuni natančnosti in njuno korelacijo. Za izračun vseh natančnosti uporabi referenčno varianco a-priori σ_0^2.

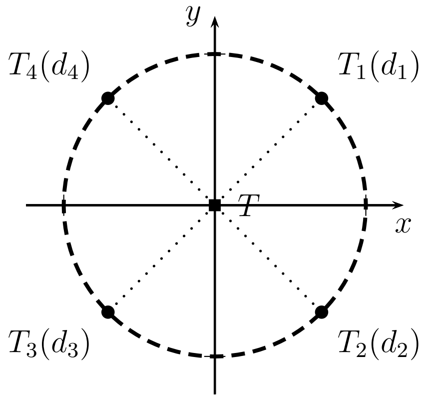


Slika 4: Naloga 4

REŠITEV: $a = 35.02\,\mathrm{m}$, $b = 19.84\,\mathrm{m}$, $c = 10.00\,\mathrm{m}$, $\sigma_a = 8.9\,\mathrm{cm}$, $\sigma_b = 8.9\,\mathrm{cm}$, $\sigma_c = 10.0\,\mathrm{cm}$, $\rho_{ab} = \rho_{ac} = \rho_{bc} = 0.0$, $S_1 = 694.7968\,\mathrm{m}^2$, $S_2 = 350.2\,\mathrm{m}^2$, $\sigma_{S_1} = 3.60\,\mathrm{m}^2$, $\sigma_{S_1} = 3.61\,\mathrm{m}^2$, $\rho_{S_1S_2} = 0.12$

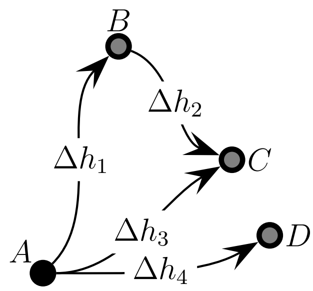
5. Imamo štiri dane točke, ki vse ležijo na enotski krožnici (glej skico): $T_1(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $T_2(x_2, y_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $T_3(x_3, y_3) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $T_4(x_4, y_4) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Z vsake točke smo proti novi točki $T(x_T, y_T)$, s približnimi vrednostmi koordinat $x_{T_0} = y_{T_0} = 0$, opazovali 4 dolžine (d_1, d_2, d_3, d_4) z natančnostjo $\sigma_d = 2\,\mathrm{cm}$. S posredno izravnavo po MNK določite kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_T$ točke T, natančnosti koordinat σ_{x_T}, σ_{y_T} in korelacijo $\rho_{x_Ty_T}$.

REŠITEV: $\mathbf{\Sigma}_T = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 \end{bmatrix}$, $\sigma_{x_T} = \sigma_{y_T} = 0.014$, $\rho_{x_Ty_T} = 0$.



Slika 5: Naloga 5

6. Določiti želimo višine trem novim reperjem B, C in D s postopkom geometričnega nivelmana. Izmerili smo (glej skico): $\Delta h_1 = 1.332\,\mathrm{m}$, $\Delta h_3 = 1.785\,\mathrm{m}$, $\Delta h_2 = 0.450\,\mathrm{m}$ in $\Delta h_4 = -0.532\,\mathrm{m}$, kjer so dolžine nivelmanskih linij enake $d_1 = 100\,\mathrm{m}$, $d_3 = 100\,\mathrm{m}$, $d_2 = 50\,\mathrm{m}$ in $d_4 = 100\,\mathrm{m}$, višina danega reperja A pa je $H_A = 10.0\,\mathrm{m}$. S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja, določi višine vsem trem novim reperjem, njihove natančnosti in korelacije.



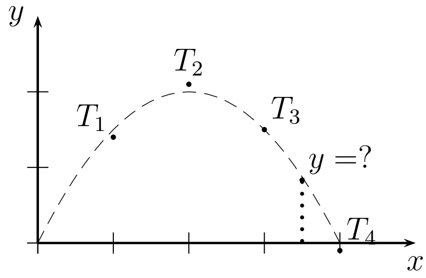
Slika 6: Naloga 6

REŠITEV: $H_B = 11.3332\,\mathrm{m}$, $H_C = 11.7838\,\mathrm{m}$, $H_D = 9.468\,\mathrm{m}$, $\sigma_{H_B} = 1.47\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{H_C} = 1.47\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{H_D} = 1.90\,\mathrm{mm}$, $\rho_{H_B H_C} = 0.67$, $\rho_{H_B H_D} = \rho_{H_C H_D} = 0.0$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.6 & -1.2 & 0.0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{mm}$.

7. V ravnini smo pri danih koordinatah x štirim točkam izmerili koordinate y in dobili: $T_1(1, 1.4)$, $T_2(2, 2.1)$, $T_3(3, 1.5)$ in $T_4(4, -0.1)$. S posredno izravnavo po MNK določite parametra parabole a in b tako, da gre parabola skozi izhodišče koordinatnega sistema in se optimalno prilega točkam. Izračunajte parametre parabole, njihove natančnosti in korelacije. Za koordinato $x = 3.5$ izračunajte vrednost y na paraboli in njeno natančnost σ_y.

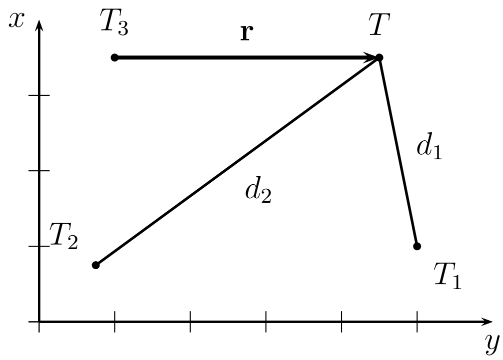
REŠITEV: $a = -0.5145$, $b = 2.0384$, $\sigma_0^2 = 0.011\,32$, $\sigma_a = 0.0234$, $\sigma_b = 0.0804$, $y(x = 3.5) = 0.8315$, $\sigma_y = 0.0694$.

8. Podane imamo koordinate treh točk, in sicer T_1=(80 m, 20 m), T_2=(10 m, 10 m) in T_3=(20 m, 80 m), kot prikazuje slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T,\, x_T)$



Slika 7: Naloga 7

smo opazovali dolžini $d_1 = 60.8\,\mathrm{m}$, $d_2 = 92.2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{d_1} = \sigma_{d_2} = 2\,\mathrm{cm}$) in vektor $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (50\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ ($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\mathrm{cm}$, $\rho_{\Delta y \Delta x} = 0.5$). S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja, določite koordinate točke T, kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_T$ položaja točke T, natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} in korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Za izračun natančnosti izberite referenčno varianco a-priori σ_0^2.



Slika 8: Naloga 8

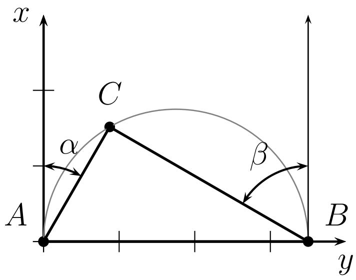
REŠITEV: $y_T = 70.000\,\mathrm{m}$, $x_T = 79.997\,\mathrm{m}$, $\sigma_{y_T} = 0.009\,\mathrm{m}$, $\sigma_{x_T} = 0.008\,\mathrm{m}$, $\rho_{y_T x_T} = 0.37\,\mathrm{m}$.

9. V krogli smo izmerili polmer $R = 3.65\,\mathrm{m}$ ($\sigma_R = 3\,\mathrm{cm}$), premer $D = 7.1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_D = 3\,\mathrm{cm}$), površino $A = 158.4\,\mathrm{m}^2$ ($\sigma_A = 0.12\,\mathrm{m}^2$) in prostornino $V = 187.5\,\mathrm{m}^3$ ($\sigma_V = 0.15\,\mathrm{m}^3$). Izravnajte opazovanja, pridobite njihova izravnana opazovanja, njihove natančnosti in korelacije. Natančnosti izračunajte enkrat z referenčno varianco a-priori σ_0^2, drugič pa z referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Ali izbira variance vpliva na izračun natančnosti? Kaj pa na korelacije?.

   REŠITEV: $\hat{R} = 3.5528\,\mathrm{m}$, $\hat{D} = 7.1057\,\mathrm{m}$, $\hat{A} = 158.5034\,\mathrm{m}^2$, $\hat{V} = 187.4243\,\mathrm{m}^3$. Natančnosti z σ_0^2: $\sigma_{\hat{R}} = 0.7\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{D}} = 1.5\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{A}} = 0.068\,\mathrm{m}^2$, $\sigma_{\hat{V}} = 0.124\,\mathrm{m}^3$. Natančnosti z $\hat{\sigma}_0^2$: $\sigma_{\hat{R}} = 1.4\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{D}} = 2.9\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{A}} = 0.133\,\mathrm{m}^2$, $\sigma_{\hat{V}} = 0.242\,\mathrm{m}^3$. Korelacije: $\rho_{RD} = \rho_{RA} = \rho_{RV} = \rho_{DA} = \rho_{DV} = \rho_{AV} = 1.0$. Izbira variance vpliva na izračun natančnosti, a ne na izračun korelacij (zakaj?).

10. Z danih točk $A(y_A, x_A)$=$(0.00\,\mathrm{m}, 0.00\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B)$=$(100.00\,\mathrm{m}, 0.00\,\mathrm{m})$ smo neodvisno in z različno natančnostjo opazovali kota $\alpha = 30°1'$ ($\sigma_\alpha = 15''$) in $\beta = 60°1'$ ($\sigma_\beta = 30''$) do točke C. Točka C leži na krožnici, katere diametralni točki sta točki A in B. S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi koordinate točke C. Določi kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_C$, natančnosti koordinat σ_{y_C} in

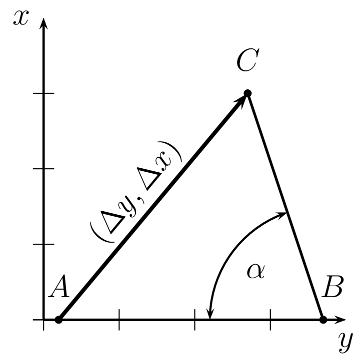
σ_{x_C} točke C ter korelacijo $\rho_{y_C x_C}$. Za izračun uporabi referenčno varianco a-priori σ_0^2.



Slika 9: Naloga 10

REŠITEV: $\hat{\alpha} = 30°0'36''$, $\hat{\beta} = 59°59'24''$, $\sigma_{\hat{\alpha}} = \sigma_{\hat{\beta}} = 13.4''$, $\rho_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -1$, $y_C = 25.015\,\mathrm{m}$, $x_C = 43.310\,\mathrm{m}$, $\sigma_{y_C} = 5.6\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{x_C} = 3.3\,\mathrm{mm}$, $\rho_{y_C x_C} = 1$.

11. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60.0\,\mathrm{m}, 45.0\,\mathrm{m})$, na točki B pa kot $\alpha = 56°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T, kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}T$, natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$.



Slika 10: Naloga 11

REŠITEV: $\Delta\hat{y} = 59.999\,92\,\mathrm{m}$, $\Delta\hat{x} = 44.999\,94\,\mathrm{m}$, $\hat{\alpha} = 56°18'44.4''$, $\hat{\sigma}_0^2 = 2.973 \times 10^{-5}$, $\sigma_{\Delta\hat{y}} = \sigma_{\Delta\hat{x}} = 5.5\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{\alpha}} = 0°0'21''$, $y_C = 69.999\,92\,\mathrm{m}$, $x_C = 44.999\,94\,\mathrm{m}$, $\sigma_{y_C} = \sigma_{x_C} = 5.5\,\mathrm{mm}$, $\rho_{y_C x_C} = -1.6 \times 10^{-4}$.