# 1 ZAKON O PRENOSU VARIANC IN KOVARIANC PRI METODI NAJMANJŠIH KVADRATOV

Zakon o prenosu varianc in kovarianc iz prejšnjega poglavja (glej datoteko *PrenosVarCovar.pdf*) smo uporabili za primere, ko je veljalo $n = n_0$ ali $r = n - n_0 = 0$, torej, ko nismo imeli nadštevilnih opazovanj. Kaj narediti v primeru ko to ne velja?

Postopek, ki nam je pri nadštevilnih opazovanjih dal optimalno izračunane neznanke je bila izravnava po MNK (pogojna ali posredna izravnava). Pri iskanju natančnosti vseh izračunanih elementov izravnave bomo tako uporabili postopka posredne ali pogojne izravnave.

Pri posredni, kot tudi pri pogojni izravnavi po MNK, smo do sedaj spoznali, kako se reši **funkcionalni model**. Da pridemo do rešitve funkcionalnega modela, ga moramo prvo nastaviti. V primeru posredne izravnave to pomeni nastavitev vseh enačb popravkov, njihova linearizacija in zapis v matrični obliki ($\mathbf{v}+\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$). V primeru pogojne izravnave pa nastavitev vseh pogojnih enačb, njihova linearizacija in zapis v matrični obliki ($\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$). Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun treh vektorjev, in sicer:

- $\boldsymbol{\Delta}$ - vektor popravkov približnih vrednosti neznank (samo posredna izravnava po MNK)
- $\mathbf{v}$ - vektor popravkov opazovanj in
- $\hat{\mathbf{l}}$ - vektor izravnanih opazovanj.

Pri prenosu varianc in kovarianc v primeru izravnave po MNK bomo poiskali rešitev **stohastičnega modela**. Stohastični model nastavimo z matriko uteži $\mathbf{P}$ (ali z matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$), ki jo seveda dobimo iz variančno-kovariančne matrike opazovanj $\boldsymbol{\Sigma}$ in izbrane referenčne variance a-priori $\sigma_0^2$ (glej datoteko *MNK_PojemUtezi.pdf*). Rešitev stohastičnega modela pomeni izračun treh variančno-kovariančnih matrik, in sicer:

- $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ - variančno-kovariančna matrika neznank ali popravkov približnih vrednosti neznank (samo posredna izravnava po MNK)
- $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ - variančno-kovariančna matrika popravkov opazovanj in
- $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ - variančno-kovariančna matrika izravnanih opazovanj.

Eden izmed pomembnejših rezultatov stohastičnega modela izravnave pa je tudi izračun **referenčne variance a-posteriori** $\hat{\sigma}_0^2$, ki jo izračunamo iz popravkov opazovanj.

## 1.1 Postopek izvedbe zakona o prenosu varianc in kovarianc pri MNK

Pri prenosu varianc in kovarianc pri MNK (posredna ali pogojna izravnava) tako postopamo v naslednjem vrstnem redu:

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave. Pri posredni izravnavi sestavimo enačbe popravkov, jih lineariziramo in zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Pri pogojni izravnavi sestavimo pogojne enačbe, jih lineariziramo in zapišemo v matrični obliki $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$.

2. Nastavimo stohastični model izravnave – sestavimo matriko $\boldsymbol{\Sigma}$, izberemo si $\sigma_0^2$ in izračunamo matriki $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{P}$.

3. Rešimo funkcionalni model izravnave. Izračunamo vektorje $\boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave. Izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$. Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike. Uporabimo bodisi $\sigma_0^2$ bodisi $\hat{\sigma}_0^2$ in izračunamo matrike $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.

Pri zgornjih korakih, za prve tri alineje glejte datoteki *PosrednaIzravnavaMNK.pdf* in *PogojnaIzravnavaMNK.pdf*, ki ste jih dobili lansko leto. Kako izbrati ustrezno varianco (alineja 5), bomo pa detajlneje v enem izmed sledečih poglavij, ki se bo nanašal na globalni test in analizo referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Tu se bomo zato pri vsaki nalogi sproti odločili, katero izmed obeh bomo izbrali.

## 1.2 Prenos varianc in kovarianc pri posredni izravnavi

Podroben opis, kako rešujemo funkcionalni model posredne izravnave je podan v dokumentu *PosrednaIzravnavaMNK.pdf*, zato bomo tu izračun vektorjev $\boldsymbol{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$ opisali na kratko. V funkcionalni model uvedemo $u$ neznank, ki jih z $n$ opazovanji povežemo v enačbah popravkov. Linearizirane enačbe popravkov v matrični obliki imajo obliko:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l} \tag{1}$$

Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave je dan z izračunom vektorjev:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{2}$$

Stohastični model rešimo tako, da za vse tri vektorje iz enačbe 2 izračunamo pripadajoče matrike kofaktorjev, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{3}$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} \tag{4}$$

Variančno-kovariančne matrike ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$) za vse tri izračunane vektorje, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela ($\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$), izračunamo tako, da matrike kofaktorjev iz enačbe 3 pomnožimo z ustrezno referenčno varianco $\sigma^2$, torej:

$$\mathbf{\Sigma}_{ii} = \sigma^2 \mathbf{Q}_{ii} \qquad i = \{\Delta, v, \hat{l}\} \tag{5}$$

Katero izmed referenčnih varianc, $\hat{\sigma}_0^2$ ali $\sigma_0^2$, bomo uporabili v enačbi 5 bomo detajlneje obrazložili v poglavju o globalnem testu.

## 1.3 Prenos varianc in kovarianc pri pogojni izravnavi

Podroben opisk reševanja funkcionalnega modela pogojne izravnave pa je podan v dokumentu *PogojnaIzravnavaMNK.pdf*. Sestavimo $r$ pogojnih enačb, ki jih lineariziramo in zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l} \tag{6}$$

Pri pogojni izravnavi nimamo neznank, zato bo rešitev funkcionalnega modela podana z rešitvijo dveh vektorjev, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \mathbf{f} \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{7}$$

Stohastični model rešimo tako, da za oba vektorja iz enačbe 7 izračunamo pripadajoči matriki kofaktorjev, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} \end{aligned} \tag{8}$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, in sicer na povsem isti način kot v primeru posredne izravnave iz enačbe 4:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} \tag{9}$$

Variančno-kovariančni matriki $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ spet dobimo z množenjem matrik kofaktorjev iz enačbe 8 z ustrezno referenčno varianco.

### 1.3.1 Izračun neznank in natančnosti neznank pri pogojni izravnavi

Iz pogojne izravnave sledi, da so rezultat le popravki opazovanj, izravnana opazovanja in natančnosti obeh količin. Torej, tu neznank ni, zato jih je potrebno izračunati po izravnavi (npr. koordinate točk, višine točk, površine itd.). Za izračun iskanih količin seveda uporabimo izravnana opazovanja $\hat{\mathbf{l}}$, za katera pa imamo izračunano kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$. Iskane količine bomo predstavili z vektorjem $\mathbf{y}$, ki se ga izračuna kot:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}}) \tag{10}$$

Kako izračunamo natančnosti neznank oziroma variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{yy}$? Uporabimo zakon o prenosu varianc in kovarianc, ko nimamo nadštevilnih opazovanj (glej datoteko *PrenosVarCovar.pdf*). Izračunali bomo jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ kot:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}})}{\partial \hat{\mathbf{l}}} \tag{11}$$

Na osnovi jakobijeve matrike $\mathbf{J}$ iz enačbe 11, matrike kofaktorjev iz enačbe 8 in ustrezne referenčne variance, bomo izračunali varianćno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ neznank kot:

$$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

## 1.4 Lastnost zakona o prenosu varianc in kovarianc pri MNK

Iz vsebine poglavij 1.2 in 1.3 lahko potegnemo par zaključkov, ki opisujejo lastnosti izračunanih rezultatov stohastičnega modela izravnave, in sicer:

- Na rezultate ne vpliva vrsta izravnave. Tako s posredno kot tudi s pogojno izravnavo moramo dobiti enake rezultate. To velja tako za rezultate funkcionalnega kot tudi stohastičnega modela. Pri pogojni izravnavi za izračun postopamo v dveh korakih, prvo izračunamo izravnana opazovanja, iz njih pa neznanke (glej poglavje 1.3.1).

- Natančnost popravkov opazovanj (iz $\mathbf{\Sigma}_{vv}$) in tudi izravnanih opazovanj (iz $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$) je vedno večja kot natančnost merjenih opazovanj (iz $\mathbf{\Sigma}$). Kako to lahko vidimo? Če preuredimo tretjo enačbo 3 (ali drugo enačbo 8), bomo dobili

  $$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} + \mathbf{Q}_{vv} \tag{13}$$

  Kofaktorji so vedno pozitivne količine ($q_{ii} > 0$), zato bo za vsako merjeno vrednost opazovanja $l_i$, njegov popravek $v_i$ in izravnano vrednost $\hat{l}_i$ veljalo:

  $$\sigma_{l_i}^2 = \sigma_{v_i}^2 + \sigma_{\hat{l}_i}^2 \qquad \leftrightarrow \qquad \sigma_{l_i} > \sigma_{v_i} \ \wedge \ \sigma_{l_i} > \sigma_{\hat{l}_i} \tag{14}$$

  Posledica je ta, da so rezultati izravnave **VEDNO** višje natančnosti kot sama opazovanja. To je eden izmed zelo pomembnih zaključkov in motivov, zakaj v geodeziji poskušamo vedno pridobiti več opazovanj kot jih nujno potrebujemo.

- Z naraščanjem števila opazovanj in z naraščanjem nadštevilnih opazovanj, bomo ugotovili, da velja:

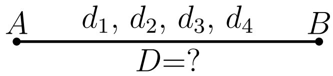
  $$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} \ \to \ \mathbf{0} \qquad \mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} \ \to \ \mathbf{0} \qquad \mathbf{\Sigma}_{vv} \ \to \ \mathbf{\Sigma} \tag{15}$$

  Torej, natančnosti neznank so vedno večje, standardni odkloni bodo konvergirali proti ničli. Enako velja za standardne odklone izravnanih opazovanj. Po drugi strani, pa bodo standardni odkloni popravkov opazovanj postajali vedno bolj enaki standardnim odklonom merjenih opazovanj.

- Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ opisuje varianco opazovanj, izračunano na osnovi vzorca $n$-tih opazovanj in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ tako predstavlja natančnost izvedenih opazovanj. Referenčno varianco $\hat{\sigma}_0^2$ (enačbi 4 in 9) izračunamo iz popravkov opazovanj, ki predstavljajo razliko med merjeno in srednjo vrednostjo, kar je povsem enako kot izračun variance vzorca pri statistiki.

## 1.5 Primer naloge – dolžina $D$ merjena štirikrat

Določiti želimo razdaljo $D$ med točkama $A$ in $B$, zato smo z merskim trakom dolžino izmerili štirikrat, kot prikazuje slika 1. Opazovanja, ki smo jih dobili so: $d_1 = 32.51\,\mathrm{m}$, $d_2 = 32.48\,\mathrm{m}$, $d_3 = 32.52\,\mathrm{m}$ in $d_4 = 32.53\,\mathrm{m}$.




Slika 1: Prikaz izmerjenih dolžin med točkama $A$ in $B$

Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja. Določi vrednost neznane dolžine $D$ in njeno natančnost. Izračunaj tudi popravke opazovanj, izravnana opazovanja in njihove natančnosti.

## 1.6 Rešitev s pogojno izravnavo

Rešitev dobimo po korakih iz poglavja 1.1. Za samo pogojno izravnavo glejte datoteko *PogojnaIzravnavaMNK.pdf* in vse primere tega poglavja v lanskem letu.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Vidimo, da imamo $n = 4$ opazovanih dolžin ($\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$), kjer bi za enolično določitev dolžine $D$ potrebovali le $n_0 = 1$ opazovanje. Glede na geometrijo sestavimo torej $r = 3$ pogojne enačbe oblike:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{d}_2 - \hat{d}_1 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{d}_3 - \hat{d}_1 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d}_4 - \hat{d}_1 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

   Enačbe 16 zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03\,\mathrm{m} \\ -0.01\,\mathrm{m} \\ -0.02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{17}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, sta matrika kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in matrika uteži $\mathbf{P}$ enotski matriki, velikosti $4 \times 4$.

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
Rešitev funkcionalnega modela izravnave predstavljata vektorja:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.00\,\mathrm{m} \\ 0.03\,\mathrm{m} \\ -0.01\,\mathrm{m} \\ -0.02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.51\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Ker nas zanima dolžina $D$, jo določimo iz izravnanih opazovanj. Izberemo npr.:

$$D = \hat{d}_1 = 32.51\,\mathrm{m} \tag{19}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
Za rešitev stohastičnega modela izravnave izračunamo matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pe}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.75 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0.75 & -0.25 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} &= \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 4.667 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0.022\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{21}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe 21, z njo izračunamo obe iskani kovariančni matriki ($\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Matriki kofaktorjev iz enačbe 20 pomnožimo z varianco iz enačbe 21 in dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_{vv} &= \begin{bmatrix} 3.500 \times 10^{-4} & -1.167 \times 10^{-4} & -1.167 \times 10^{-4} & -1.167 \times 10^{-4} \\ -1.167 \times 10^{-4} & 3.500 \times 10^{-4} & -1.167 \times 10^{-4} & -1.167 \times 10^{-4} \\ -1.167 \times 10^{-4} & -1.167 \times 10^{-4} & 3.500 \times 10^{-4} & -1.167 \times 10^{-4} \\ -1.167 \times 10^{-4} & -1.167 \times 10^{-4} & 3.500 \times 10^{-4} & -1.167 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} \\ 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} \\ 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} \\ 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} & 1.167 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

Določiti pa želimo tudi natančnost $\sigma_D$ iskane dolžine $D$. "Izračunali" smo jo iz vektorja izravnanih opazovanj (glej enačbo 19), zato moramo nastaviti jakobijevo matriko $\mathbf{J}$, ki je velikosti $1 \times 4$, saj imamo eno neznanko ($D$), vektor $\hat{\mathbf{l}}$ pa je velikosti $4 \times 4$. Odvajamo enačbo 19 po vseh izravnanih opazovanjih in dobimo:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial \hat{d}_1} & \frac{\partial D}{\partial \hat{d}_2} & \frac{\partial D}{\partial \hat{d}_3} & \frac{\partial D}{\partial \hat{d}_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc dobimo variančno-kovariančno matriko neznanke $\mathbf{\Sigma}_D$ kot:

$$\mathbf{\Sigma}_D = \sigma_D^2 = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = 1.167 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \tag{24}$$

Natančnost $\sigma_D$ dobimo tako, da varianco iz enačbe 24 korenimo in dobimo $\sigma_D = 0.011\,\mathrm{m}$.

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Natančnosti popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj dobimo tako, da korenimo diagonalne elemente iz obeh kovariančnih matrik iz enačbe 22. Natančnosti vseh popravkov so enake, prav tako natančnosti vseh izravnanih opazovanj:

$$\sigma_{v_i} = 0.019\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{d}_i} = 0.011\,\mathrm{m} \qquad i = \{1, 2, 3, 4\} \tag{25}$$

   Iz obeh kovariančnih matrik $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ iz enačbe 22, kot tudi iz obeh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ iz enačbe 20, lahko vidimo, da so popravki med seboj korelirani, prav tako so tudi izravnana opazovanja. Korelacije so:

$$\rho_{v_i v_j} = -0.33 \qquad \sigma_{\hat{d}_i \hat{d}_j} = 1.00 \qquad i, j = \{1, 2, 3, 4\} \wedge i \neq j \tag{26}$$

## 1.7 Rešitev s posredno izravnavo

Tudi tu bomo šli po korakih iz poglavja 1.1, kjer za postopek posredne izravnave glejte datoteko *PosrednaIzravnavaMNK.pdf* in vse primere tega poglavja v lanskem letu.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Pri izmerjenih $n = 4$ dolžinah, kjer bi za enolično določitev dolžine $D$ potrebovali le $n_0 = 1$ opazovanje, bomo nastavili $u = 1$ neznank, in sicer $\mathbf{x} = [D]$. Sestavimo $n = 4$ enačb popravkov, ki imajo obliko:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{d}_1 - D = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{d}_2 - D = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d}_3 - D = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{d}_4 - D = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Enačbe 27 zapišemo v osnovni matrični obliki posredne izravnave, kjer za približno vrednost neznanke izberemo $D_0 = 0.00\,\mathrm{m}$:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32.51\,\mathrm{m} \\ -32.48\,\mathrm{m} \\ -32.52\,\mathrm{m} \\ -32.53\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{28}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, sta matrika kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in matrika uteži $\mathbf{P}$ enotski matriki, velikosti $4 \times 4$.

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave predstavljajo trije vektorji:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 32.51\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.00\,\mathrm{m} \\ 0.03\,\mathrm{m} \\ -0.01\,\mathrm{m} \\ -0.02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.51\,\mathrm{m} \\ 32.51\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{29}$$

   Dolžino $D$ dobimo tako, da približni vrednosti $D_0$ prištejemo popravek iz vektorja $\boldsymbol{\Delta} = [\delta D]$ in dobimo:

$$D = D_0 + \delta D = 32.51\,\mathrm{m} \tag{30}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun vseh treh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.75 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & -0.25 & 0.75 & -0.25 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

   Iz prve enačbe (izračun $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$) vidimo, da je vrednost enaka $0.25 = 1/n = 1/4$.

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 4.667 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0.022\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{32}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe 32, z njo izračunamo vse iskane kovariančne matrike ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Matrike kofaktorjev iz enačbe 31 pomnožimo z varianco iz enačbe 32 in dobimo:

$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 1.167\times10^{-4} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{\Sigma}_{vv} = \begin{bmatrix} 3.500\times10^{-4} & -1.167\times10^{-4} & -1.167\times10^{-4} & -1.167\times10^{-4} \\ -1.167\times10^{-4} & 3.500\times10^{-4} & -1.167\times10^{-4} & -1.167\times10^{-4} \\ -1.167\times10^{-4} & -1.167\times10^{-4} & 3.500\times10^{-4} & -1.167\times10^{-4} \\ -1.167\times10^{-4} & -1.167\times10^{-4} & 3.500\times10^{-4} & -1.167\times10^{-4} \end{bmatrix} \quad (33)$$
$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} = \begin{bmatrix} 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} \\ 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} \\ 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} \\ 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} & 1.167\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

Tu vidimo prednost posredne izravnave pred pogojno izravnavo. V primeru posredne izravnave dobimo vrednost neznanke neposredno ($\mathbf{\Delta}$), prav tako tudi kovariančno matriko neznank ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$). Dodatnega izračuna neznank in njihovih natančnosti ni potreben.

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
Spet korenimo vse diagonalne elemente vseh kovariančnih matrik iz enačbe 33. Za neznanko dobimo:

$$\sigma_D = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 0.011\,\mathrm{m} \quad (34)$$

Enačba 34 opisuje, kako dobimo natančnost dolžine $D$ pri posredni izravnavi po MNK. Vemo, da $\hat{\sigma}_0$ predstavlja natančnost opazovanj in $\sigma_D$ dobimo tako, da natančnost opazovanj delimo s korenom števila opazovanj. Iz tega sledi, da je natančnost $\sigma_D$ premo sorazmerna z natančnostjo opazovanj in obratno sorazmera s številom opazovanj. Večkrat kot izmerimo dolžino (ko $n$ narašča), bolj natančno dobimo izravnano dolžino $D$. Teoretično to pomeni, da lahko s ponovljenimi izmerami iste količine pridemo do poljubne natančnosti izravnane vrednosti. A paziti moramo, da v opazovanjih nimamo ne grobih ne sistematičnih pogreškov.

Kar se tiče popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj, pa velja enako kot v primeru pogojne izravnave. Dobimo:

$$\sigma_{v_i} = 0.019\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{d}_i} = 0.011\,\mathrm{m} \qquad i = \{1,2,3,4\} \quad (35)$$

Tudi korelacije bodo enake, lahko vidimo, da so popravki med seboj korelirani, prav tako so tudi izravnana opazovanja. Korelacije so:

$$\rho_{v_i v_j} = -0.33 \qquad \sigma_{\hat{d}_i\hat{d}_j} = 1.00 \qquad i,j = \{1,2,3,4\} \wedge i \neq j \quad (36)$$