

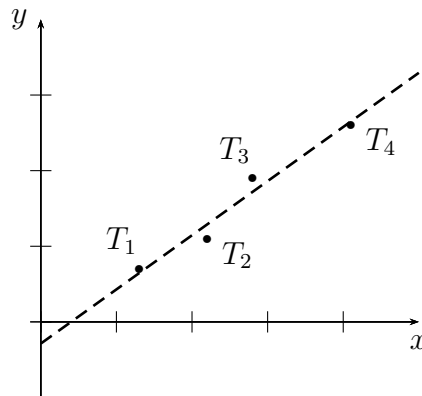
Posredna izravnava po MNK – Premica v ravnini:

V ravnini imamo štiri točke, za katere imamo opazovane tako koordinate x , kot tudi koordinate y , vrednosti opazovanj pa so predstavljene v preglednici 1.

Tabela 1: Opazovane koordinate x in y štirih točk

Točka	x	y
T_1	1.3	0.7
T_2	2.2	1.1
T_3	2.8	1.9
T_4	4.1	2.6

Točke v ravnini prikazuje slika 1. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi premico, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1: Točke v ravnini

Iz podatkov je razvidno, da je število opazovanj enako $n = 8$, opazovane imamo tako 4 koordinate x in 4 koordinate y . Za določitev minimalnega števila opazovanj, da rešimo problem, pa prvo poskusimo nastaviti enačbe popravkov. Enačbe popravkov bodo oblike:

$$\begin{aligned}
 F_1 &\equiv \hat{x}_1 - f_{x_1}(\mathbf{x}) = 0 \\
 F_2 &\equiv \hat{y}_1 - f_{y_1}(\mathbf{x}) = 0 \\
 F_3 &\equiv \hat{x}_2 - f_{x_2}(\mathbf{x}) = 0 \\
 F_4 &\equiv \hat{y}_2 - f_{y_2}(\mathbf{x}) = 0 \\
 F_5 &\equiv \hat{x}_3 - f_{x_3}(\mathbf{x}) = 0 \\
 F_6 &\equiv \hat{y}_3 - f_{y_3}(\mathbf{x}) = 0 \\
 F_7 &\equiv \hat{x}_4 - f_{x_4}(\mathbf{x}) = 0 \\
 F_8 &\equiv \hat{y}_4 - f_{y_4}(\mathbf{x}) = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

V enačbah 1 vektor \mathbf{x} predstavlja vektor neznank. Enačbe popravkov sestavimo tako, da prvo zapišemo niz vseh izravnanih opazovanj na začetku enačbe. Potem pa vsa izravnana opazovanja predstavimo z neznankami. Ker želimo določiti premico, ki se optimalno prilega točkam, bomo za dve neznanki izbrali parametra premice a in b . Enačbo premice, $y = ax + b$, bomo uporabili za opazovane koordinate y , a ker v vsaki enačbi popravkov lahko nastopa le eno opazovanje, tu ne smemo uporabiti koordinate x . Zato za vsako opazovano koordinato x nastavimo novo neznanko, kar pomeni, da moramo dodatno uvesti še štiri neznanke, ki jih označimo s p_1 , p_2 , p_3 in p_4 . Vidimo,

da je minimalno število opazovanj enako:

$$n_0 = \underbrace{2}_{a,b} + \underbrace{4}_{p_1, p_2, p_3, p_4} = 6 \quad (2)$$

Ko imamo uvedene neznanke, jih damo v vektor neznanek, in sicer:

$$\mathbf{x} = [a \quad b \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4]^T \quad (3)$$

Sedaj sestavimo končne enačbe popravkov kot:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{x}_1 - p_1 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_1 - a p_1 - b = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{x}_2 - p_2 = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{y}_2 - a p_2 - b = 0 \\ F_5 &\equiv \hat{x}_3 - p_3 = 0 \\ F_6 &\equiv \hat{y}_3 - a p_3 - b = 0 \\ F_7 &\equiv \hat{x}_4 - p_4 = 0 \\ F_8 &\equiv \hat{y}_4 - a p_4 - b = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Vidimo, da so enačbe popravkov iz 4 sestavljene po pravilih, v vsaki enačbi nastopa le eno (izravnano) opazovanje, ki se nato zapiše v odvisnosti od (le) neznanek. Enačbe popravkov so nelinearne, zato je potrebno izračunati približne vrednosti neznanek. Uporabimo opazovanja, kjer dobimo:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ p_{1,0} \\ p_{2,0} \\ p_{3,0} \\ p_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y_1 - a_0 x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 1.3 \\ 2.2 \\ 2.8 \\ 4.1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sestavimo osnovni matrični model posredne izravnave, $\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f}$. Vektor popravkov opazovanj \mathbf{v} se nanaša na vektor opazovanj, oziroma vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{I}}$ iz enačb popravkov v 4, medtem ko se vektor popravkov približnih vrednosti neznanek Δ nanaša na neznanke iz enačbe 3, oziroma na približne vrednosti neznanek iz enačbe 5. Sestavimo prvo matriko koeficientov \mathbf{B} , ki je velikosti 8×6 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \frac{\partial F_1}{\partial p_3} & \frac{\partial F_1}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \frac{\partial F_2}{\partial p_3} & \frac{\partial F_2}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial p_1} & \frac{\partial F_3}{\partial p_2} & \frac{\partial F_3}{\partial p_3} & \frac{\partial F_3}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} & \frac{\partial F_4}{\partial p_1} & \frac{\partial F_4}{\partial p_2} & \frac{\partial F_4}{\partial p_3} & \frac{\partial F_4}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_5}{\partial a} & \frac{\partial F_5}{\partial b} & \frac{\partial F_5}{\partial p_1} & \frac{\partial F_5}{\partial p_2} & \frac{\partial F_5}{\partial p_3} & \frac{\partial F_5}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_6}{\partial a} & \frac{\partial F_6}{\partial b} & \frac{\partial F_6}{\partial p_1} & \frac{\partial F_6}{\partial p_2} & \frac{\partial F_6}{\partial p_3} & \frac{\partial F_6}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_7}{\partial a} & \frac{\partial F_7}{\partial b} & \frac{\partial F_7}{\partial p_1} & \frac{\partial F_7}{\partial p_2} & \frac{\partial F_7}{\partial p_3} & \frac{\partial F_7}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_8}{\partial a} & \frac{\partial F_8}{\partial b} & \frac{\partial F_8}{\partial p_1} & \frac{\partial F_8}{\partial p_2} & \frac{\partial F_8}{\partial p_3} & \frac{\partial F_8}{\partial p_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,0} & -1 & -a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -p_{2,0} & -1 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -p_{3,0} & -1 & 0 & 0 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -p_{4,0} & -1 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Nato sestavimo še vektor odstopanj \mathbf{f} enačb popravkov, ki ima obliko:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_{1,0} - x_1 \\ a_0 p_{1,0} + b_0 - y_1 \\ p_{2,0} - x_2 \\ a_0 p_{2,0} + b_0 - y_2 \\ p_{3,0} - x_3 \\ a_0 p_{3,0} + b_0 - y_3 \\ p_{4,0} - x_4 \\ a_0 p_{4,0} + b_0 - y_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Na osnovi matrike \mathbf{B} iz enačbe 6 in vektorja \mathbf{f} iz enačbe 7 sestavimo sistem normalnih enačb, in sicer tako, da izračunamo matriko \mathbf{N} in vektor \mathbf{t} in izračunamo vektor $\mathbf{\Delta}$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad \mathbf{t} = \mathbf{B}^T \mathbf{f} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \quad (8)$$

Numeričnih vrednosti v zgornje enačbe nismo dajali, saj je potrebno rešitev poiskati iterativno. Ko dobimo vektor $\mathbf{\Delta}$, popravimo približne vrednosti neznanke iz enačbe 5 in ponovimo izravnavo. Postopek ponavljamo vse dokler velja:

$$\|\mathbf{\Delta}\| < 1 \times 10^{-8} \quad (9)$$

V enačbi 9 operator $\|\cdot\|$ predstavlja normo vektorja (dolžino vektorja). Iterativni postopek je izveden spodaj:

Iteracija # 1: $\|\mathbf{\Delta}\| = 5.6550 \times 10^{-1}$

Iteracija # 2: $\|\mathbf{\Delta}\| = 3.8656 \times 10^{-2}$

Iteracija # 3: $\|\mathbf{\Delta}\| = 6.7343 \times 10^{-3}$

Iteracija # 4: $\|\mathbf{\Delta}\| = 3.0019 \times 10^{-4}$

Iteracija # 5: $\|\mathbf{\Delta}\| = 5.2921 \times 10^{-5}$

Iteracija # 6: $\|\mathbf{\Delta}\| = 2.3607 \times 10^{-6}$

Iteracija # 7: $\|\mathbf{\Delta}\| = 4.1575 \times 10^{-7}$

Iteracija # 8: $\|\mathbf{\Delta}\| = 1.8466 \times 10^{-8}$

Iteracija # 9: $\|\mathbf{\Delta}\| = 3.0000 \times 10^{-9}$

Po izvedenih 9-ih korakih iteracije so ocenjene neznanke enake:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.716\ 208 \\ -0.287\ 141 \\ 1.326\ 543 \\ 2.110\ 759 \\ 2.886\ 041 \\ 4.076\ 656 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Vektor popravkov \mathbf{v} in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{I}}$ sta:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{x_3} \\ v_{y_3} \\ v_{x_4} \\ v_{y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.026\,543 \\ -0.037\,060 \\ -0.089\,241 \\ 0.124\,602 \\ 0.086\,041 \\ -0.120\,135 \\ -0.023\,344 \\ 0.032\,593 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.326\,543 \\ 0.662\,940 \\ 2.110\,759 \\ 1.224\,602 \\ 2.886\,041 \\ 1.779\,865 \\ 4.076\,656 \\ 2.632\,593 \end{bmatrix} \quad (11)$$