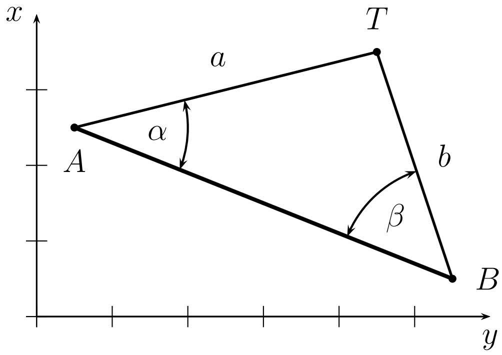
Prenos varianc in kovarianc pri MNK – Ravninska geodetska mreža:

V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (5.00\,\mathrm{m}, 10.00\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (20.00\,\mathrm{m}, 0.00\,\mathrm{m})$. Da bi določili položaj točke T, smo s točke A opazovali dolžino $a = 16.2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0.1\,\mathrm{m}$) in kot $\alpha = 45^\circ$ ($\sigma_\alpha = 30'$), s točke B pa dolžino $b = 13.2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_b = 0.1\,\mathrm{m}$) in kot $\beta = 60^\circ$ ($\sigma_\beta = 30'$), kot to prikazuje slika 1. S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj koordinate točke $T(y_T, x_T)$, natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Uporabite referenčno varianco a-priori σ_0^2.



Slika 1: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja točke T

Pogojna izravnava tega primera je detajlno prikazana v datoteki *Naloga7_HZMreza2.pdf* iz lanskega leta, ko smo obravnavali pogojno izravnavo.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Da bi določili koordinate točke T smo izmerili $n =$ ___ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali le $n_0 =$ ___ opazovanj. Ker imamo $r =$ ___ nadštevilnih opazovanj, sestavimo toliko pogojnih enačb. Primer pogojnih enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}\sin\hat{\alpha} - \hat{b}\sin\hat{\beta} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\hat{\alpha}+\hat{\beta}) - D^2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   V drugi pogojni enačbi iz enačbe 1 količina D predstavlja dolžino med danima točkama A in B. Če nastavimo vektor opazovanj kot $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a & \alpha & b & \beta \end{bmatrix}^\mathrm{T}$, potem pogojni enačbi 1 lahko zapišemo v osnovni matrični obliki pogojne izravnave izravnave $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$:

$$\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_\alpha \\ v_b \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Opazovanja so različne natančnosti in medseboj nekorelirana. Sestavimo kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$, za referenčno varianco si izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$ in dobimo kofaktorje

opazovanj enake:

$$q_a = \underline{\quad} \qquad q_\alpha = \underline{\quad} \qquad q_b = \underline{\quad} \qquad q_\beta = \underline{\quad} \tag{3}$$

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela pogojne izravnave predstavljata vektorja popravkov opazovanj in vektor izravnanih opazovanj:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \underline{\quad\;}\text{m} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad\;}\text{m} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \underline{\quad\;}\text{m} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad\;}\text{m} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{4}$$

   V enačbi 4 sta tako popravka v_α in v_β, kot tudi izravana kota $\hat{\alpha}$ in $\hat{\beta}$, podana v radianih. Popravka lahko zapišemo tudi kot $v_\alpha = \_'\_''$, $v_\beta = \_'\_''$, izravnana kota pa kot $\hat{\alpha} = \_^\circ\_'\_''$ in $\hat{\beta} = \_^\circ\_'\_''$.

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun obeh matrik kofaktorjev, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} &= \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = \underline{\quad} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = \underline{\quad} \end{aligned} \tag{6}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
   Za izračun kovariančnih matrik $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ bomo uporabili referenčno varianco σ_0^2, kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_{vv} &= \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Za izračun natančnosti vseh količin, korenimo diagonalne elemente vseh kovariančnih matrik iz enačbe 7, korelacije pa dobimo iz izvendiagonalnih elementov matrik.
   Ker nas primarno zanimajo izravnana opazovanja, izračunajmo natančnosti le-teh:

$$\sigma_{\hat{a}} = \_\_\text{cm} \qquad \sigma_{\hat{\alpha}} = \_\_'\_\_'' \qquad \sigma_{\hat{b}} = \_\_\text{cm} \qquad \sigma_{\hat{\beta}} = \_\_'\_\_'' \tag{8}$$

   Korelacije med izravnanimi opazovanji izpišimo v obliki preglednice:

	$\hat{a}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{b}$	$\hat{\beta}$
$\hat{a}$	—			
$\hat{\alpha}$	__	—		
$\hat{b}$	__	__	—	
$\hat{\beta}$	__	__	__	—

Rezultat pogojne izravnave v zgornjem postopku sta vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ iz enačbe 4 in njegova variančno-kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ iz enačbe 7. Izravnana opazovanja in koordinate danih točk (A in B) uporabimo za izračun koordinat točke T, in sicer:

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + \hat{a}\sin(\nu_A^B - \hat{\alpha}) = \_\_\text{m} \\ x_T &= x_A + \hat{a}\cos(\nu_A^B - \hat{\alpha}) = \_\_\text{m} \end{aligned} \tag{9}$$

Natančnosti koordinat in pripadajočo korelacijo dobimo preko zakona o prenosu varianc in kovarianc. Tudi v tem primeru izhajamo iz vektorja izravnanih opazovanj $\hat{l}$ in kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$, funkcijska povezava pa je določena v enačbi 9. Na koncu dobimo:

$$\sigma_{y_T} = \_\_\text{cm} \quad \sigma_{x_T} = \_\_\text{cm} \quad \rho_{y_T x_T} = \_\_ \tag{10}$$