Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Študijski program 1. stopnje

Geodezija in geoinformatika, 2. letnik

IZRAVNALNI RAČUN 2 - VAJE

Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri metodi najmanjših kvadratov

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Različica: 2. december 2025

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Kazalo preglednic

1 ZAKON O PRENOSU VARIANC IN KOVARIANC PRI METODI NAJMANJŠIH KVADRATOV

Zakon o prenosu varianc in kovarianc iz prejšnjega poglavja (glej prejšnje poglavje *Zakon o prenosu varianc in kovarianc*) smo uporabili za primere, ko je veljalo $n = n_0$ ali $r = n - n_0 = 0$, torej, ko nismo imeli nadštevilnih opazovanj. **Kaj narediti v primeru ko to ne velja?**

Postopek, ki nam je pri nadštevilnih opazovanjih dal optimalno izračunane neznanke je bila izravnava po MNK (pogojna ali posredna izravnava). Pri iskanju natančnosti vseh izračunanih elementov izravnave bomo tako uporabili postopka posredne ali pogojne izravnave.

Pri posredni, kot tudi pri pogojni izravnavi po MNK, smo do sedaj spoznali, kako se reši **funkcionalni model**. Da pridemo do rešitve funkcionalnega modela, ga moramo prvo nastaviti. V primeru posredne izravnave to pomeni nastavitev vseh enačb opazovanj, nato njihova linearizacija in sestava enačb popravkov ter zapis v matrični obliki ($\mathbf{v}+\mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$). V primeru pogojne izravnave pa nastavitev vseh pogojnih enačb, njihova linearizacija in zapis v matrični obliki ($\mathbf{Av} = \mathbf{f}$). Rešitev funkcionalnega modela pomeni izračun treh vektorjev, in sicer:

- $\mathbf{\Delta}$ - vektor popravkov približnih vrednosti neznank (samo posredna izravnava po MNK)
- $\mathbf{v}$ - vektor popravkov opazovanj in
- $\hat{\mathbf{l}}$ - vektor izravnanih opazovanj.

Pri prenosu varianc in kovarianc v primeru izravnave po MNK bomo poiskali rešitev **stohastičnega modela**. Stohastični model nastavimo z matriko uteži $\mathbf{P}$ (ali z matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$), ki jo seveda dobimo iz variančno-kovariančne matrike opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ in izbrane referenčne variance a-priori σ_0^2 (glej poglavje prejšnjega leta *Pojem uteži*). Rešitev stohastičnega modela pomeni izračun treh variančno-kovariančnih matrik, in sicer:

- $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ - variančno-kovariančna matrika (popravkov približnih vrednosti) neznank (samo posredna izravnava po MNK)
- $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ - variančno-kovariančna matrika popravkov opazovanj in
- $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ - variančno-kovariančna matrika izravnanih opazovanj.

Eden izmed pomembnejših rezultatov stohastičnega modela izravnave pa je tudi izračun **referenčne variance a-posteriori** $\hat{\sigma}_0^2$, ki jo izračunamo iz popravkov opazovanj.

1.1 Postopek izvedbe zakona o prenosu varianc in kovarianc pri MNK

Pri prenosu varianc in kovarianc pri MNK (posredna ali pogojna izravnava) tako postopamo v naslednjem vrstnem redu:

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave. Pri posredni izravnavi sestavimo enačbe popravkov, jih lineariziramo in zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$. Pri pogojni izravnavi sestavimo pogojne enačbe, jih lineariziramo in zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.

2. Nastavimo stohastični model izravnave – sestavimo matriko $\mathbf{\Sigma}$, izberemo si σ_0^2 in izračunamo matriki $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{P}$.
3. Rešimo funkcionalni model izravnave. Izračunamo vektorje $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$.
4. Rešimo tudi stohastični model izravnave. Izračunamo matrike $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$. Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$.
5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike. Uporabimo bodisi σ_0^2 bodisi $\hat{\sigma}_0^2$ in izračunamo matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$.
6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.

Pri zgornjih korakih, za prve tri alineje glejte poglavji prejšnjega leta *Posredna izravnava po MNK* in *Pogojna izravnava po MNK*. Kako izbrati ustrezno varianco (alineja 5), bomo pa določiti točno v enem izmed sledečih poglavij, ki se bo nanašal na globalni test in analizo referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Tu se bomo zato pri vsaki nalogi sproti odločili, katero izmed obeh bomo izbrali.

1.2 Prenos varianc in kovarianc pri posredni izravnavi

Podroben opis, kako rešimo funkcionalni model posredne izravnave, smo spoznali prejšnje leto v sklopu poglavja *Posredna izravnava po MNK*, zato bomo tu izračun vektorjev $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$ opisali na kratko. V funkcionalni model uvedemo u neznank, ki jih z n opazovanji povežemo v enačbah opazovanj. Enačbe opazovanj lineariziramo (dobimo enačbe popravkov) in jih zapišemo v matrično obliko:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l} \tag{1–1}$$

Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave je dan z izračunom vektorjev:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{PB}\right)^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pf} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{1–2}$$

Stohastični model rešimo tako, da za vse tri vektorje iz enačbe (1–2) izračunamo pripadajoče matrike kofaktorjev, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q} - \mathbf{BQ}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{BQ}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{1–3}$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pv}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pv}}{r} \tag{1–4}$$

Variančno-kovariančne matrike ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$) za vse tri izračunane vektorje, ki predstavljajo rešitev funkcionalnega modela ($\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$), izračunamo tako, da matrike kofaktorjev iz enačbe (1–3) pomnožimo z ustrezno referenčno varianco σ^2, torej:

$$\mathbf{\Sigma}_{ii} = \sigma^2\mathbf{Q}_{ii} \qquad i = \{\Delta, v, \hat{l}\} \tag{1–5}$$

Katero izmed referenčnih varianc, $\hat{\sigma}_0^2$ ali σ_0^2, bomo uporabili v enačbi (1–5) bomo detajlneje obrazložili v poglavju o globalnem testu.

1.3 Prenos varianc in kovarianc pri pogojni izravnavi

Kako rešimo funkcionalni model pogojne izravnave smo tudi spoznali prejšnje leto, v sklopu poglavja *Pogojna izravnava po MNK*. Sestavimo r pogojnih enačb, ki jih lineariziramo in zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{Av} = \mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l} \tag{1–6}$$

Pri pogojni izravnavi nimamo neznank, zato bo rešitev funkcionalnega modela podana z rešitvijo dveh vektorjev, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{QA}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{AQA}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \mathbf{f} \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{1–7}$$

Stohastični model rešimo tako, da za oba vektorja iz enačbe (1–7) izračunamo pripadajoči matriki kofaktorjev, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{QA}^{\mathrm{T}}\mathbf{PeAQ} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} \end{aligned} \tag{1–8}$$

Izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$, in sicer na povsem isti način kot v primeru posredne izravnave iz enačbe (1–4):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pv}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pv}}{r} \tag{1–9}$$

Variančno-kovariančni matriki $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ spet dobimo z množenjem matrik kofaktorjev iz enačbe (1–8) z ustrezno referenčno varianco.

1.3.1 Izračun neznank in natančnosti neznank pri pogojni izravnavi

Iz pogojne izravnave sledi, da so rezultat le popravki opazovanj, izravnana opazovanja in natančnosti obeh količin. Torej, tu neznank ni, zato jih je potrebno izračunati po izravnavi (npr. koordinate točk, višine točk, površine itd.). Za izračun iskanih količin seveda uporabimo izravnana opazovanja $\hat{\mathbf{l}}$, za katera pa imamo izračunano kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$. Iskane količine bomo predstavili z vektorjem $\mathbf{y}$, ki se ga izračuna kot:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}}) \tag{1–10}$$

Kako izračunamo natančnosti neznank oziroma variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{yy}$? Uporabimo zakon o prenosu varianc in kovarianc, ko nimamo nadštevilnih opazovanj (glej prejšnje poglavje *Zakon o prenosu varianc in kovarianc*). Izračunali bomo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ kot:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}(\hat{\mathbf{l}})}{\partial \hat{\mathbf{l}}} \tag{1–11}$$

Na osnovi Jakobijeve matrike $\mathbf{J}$ iz enačbe (1–11), matrike kofaktorjev iz enačbe (1–8) in ustrezne referenčne variance, bomo izračunali variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ neznank kot:

$$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} \tag{1–12}$$

1.4 Lastnost zakona o prenosu varianc in kovarianc pri MNK

Iz vsebine poglavij 1.2 in 1.3 lahko potegnemo par zaključkov, ki opisujejo lastnosti izračunanih rezultatov stohastičnega modela izravnave, in sicer:

- Na rezultate ne vpliva vrsta izravnave. Tako s posredno kot tudi s pogojno izravnavo moramo dobiti enake rezultate. To velja tako za rezultate funkcionalnega kot tudi stohastičnega modela. Pri pogojni izravnavi za izračun postopamo v dveh korakih, prvo izračunamo izravnana opazovanja, iz njih pa neznanke (glej poglavje 1.3.1).

- Natančnost popravkov opazovanj (iz $\mathbf{\Sigma}_{vv}$) in tudi izravnanih opazovanj (iz $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$) je vedno večja kot natančnost merjenih opazovanj (iz $\mathbf{\Sigma}$). Kako to lahko vidimo? Če preuredimo tretjo enačbo (1–3) (ali drugo enačbo (1–8)), bomo dobili

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} + \mathbf{Q}_{vv} \tag{1–13}$$

  Kofaktorji so vedno pozitivne količine ($q_{ii} > 0$), zato bo za vsako merjeno vrednost opazovanja l_i, njegov popravek v_i in izravnano vrednost $\hat{l}_i$ veljalo:

$$\sigma_{l_i}^2 = \sigma_{v_i}^2 + \sigma_{\hat{l}_i}^2 \qquad \leftrightarrow \qquad \sigma_{l_i} > \sigma_{v_i} \ \wedge \ \sigma_{l_i} > \sigma_{\hat{l}_i} \tag{1–14}$$

  Posledica je ta, da so v primeru metode najmanjših kvadratov rezultati izravnave **VEDNO** višje natančnosti kot sama opazovanja. To je eden izmed zelo pomembnih zaključkov in motivov, zakaj v geodeziji poskušamo vedno pridobiti več opazovanj kot jih nujno potrebujemo.

- Z naraščanjem števila opazovanj in z naraščanjem nadštevilnih opazovanj, bomo ugotovili, da velja:

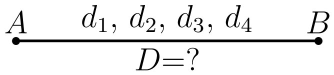
$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} \rightarrow \mathbf{0} \qquad \mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} \rightarrow \mathbf{0} \qquad \mathbf{\Sigma}_{vv} \rightarrow \mathbf{\Sigma} \tag{1–15}$$

  Torej, natančnosti neznank so vedno večje, standardni odkloni bodo konvergirali proti ničli. Enako velja za standardne odklone izravnanih opazovanj. Po drugi strani, pa bodo standardni odkloni popravkov opazovanj postajali vedno bolj enaki standardnim odklonom merjenih opazovanj.

- Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ opisuje varianco opazovanj, izračunano na osnovi vzorca n-tih opazovanj in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ tako predstavlja natančnost izvedenih opazovanj. Referenčno varianco $\hat{\sigma}_0^2$ (enačbi (1–4) in (1–9)) izračunamo iz popravkov opazovanj, ki predstavljajo razliko med merjeno in srednjo vrednostjo, kar je povsem enako kot izračun variance vzorca pri statistiki.

1.5 Primer 1 – dolžina merjena štirikrat

Določiti želimo razdaljo D med točkama A in B, zato smo z merskim trakom dolžino izmerili štirikrat, kot prikazuje slika 1–1. Opazovanja, ki smo jih dobili so: $d_1 = 32{,}51\,\mathrm{m}$, $d_2 = 32{,}48\,\mathrm{m}$, $d_3 = 32{,}52\,\mathrm{m}$ in $d_4 = 32{,}53\,\mathrm{m}$.



Slika 1–1: Prikaz izmerjenih dolžin med dvema točkama

Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja. Določi vrednost neznane dolžine D in njeno natančnost. Izračunaj tudi popravke opazovanj, izravnana opazovanja in njihove natančnosti.

1.5.1 Rešitev s pogojno izravnavo

Rešitev dobimo po korakih iz poglavja 1.1. Za samo pogojno izravnavo glejte poglavje *Pogojna izravnava po MNK* in vse primere tega poglavja prejšnjega leta.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Vidimo, da imamo $n = 4$ opazovanih dolžin ($\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$), kjer bi za enolično določitev dolžine D potrebovali le $n_0 = 1$ opazovanje. Glede na geometrijo sestavimo torej $r = 3$ pogojne enačbe oblike:
   $$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{d}_2 - \hat{d}_1 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{d}_3 - \hat{d}_1 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d}_4 - \hat{d}_1 = 0 \end{aligned} \tag{1–16}$$
   Enačbe (1–16) zapišemo v matrični obliki:
   $$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}03\,\mathrm{m} \\ -0{,}01\,\mathrm{m} \\ -0{,}02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–17}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, sta matrika kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in matrika uteži $\mathbf{P}$ enotski matriki, velikosti 4×4.

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela izravnave predstavljata vektorja:
   $$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}03\,\mathrm{m} \\ -0{,}01\,\mathrm{m} \\ -0{,}02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}51\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–18}$$
   Ker nas zanima dolžina D, jo določimo iz izravnanih opazovanj. Izberemo npr.:
   $$D = \hat{d}_1 = 32{,}51\,\mathrm{m} \tag{1–19}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Za rešitev stohastičnega modela izravnave izračunamo matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, in sicer:

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{bmatrix} \tag{1–20}$$

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 4{,}667 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$
$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0{,}022\,\mathrm{m} \tag{1–21}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
   Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe (1–21), z njo izračunamo obe iskani kovariančni matriki ($\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Matriki kofaktorjev iz enačbe (1–20) pomnožimo z varianco iz enačbe (1–21) in dobimo:

$$\mathbf{\Sigma}_{vv} = \begin{bmatrix} 3{,}500 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} \\ -1{,}167 \times 10^{-4} & 3{,}500 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} \\ -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & 3{,}500 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} \\ -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & 3{,}500 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} = \begin{bmatrix} 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} \\ 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} \\ 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} \\ 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \tag{1–22}$$

   Določiti pa želimo tudi natančnost σ_D iskane dolžine D. "Izračunali" smo jo iz vektorja izravnanih opazovanj (glej enačbo (1–19)), zato moramo nastaviti Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$, ki je velikosti 1×4, saj imamo eno neznanko (D), vektor $\hat{\mathbf{l}}$ pa je velikosti 4×4. Odvajamo enačbo (1–19) po vseh izravnanih opazovanjih in dobimo:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial \hat{d}_1} & \frac{\partial D}{\partial \hat{d}_2} & \frac{\partial D}{\partial \hat{d}_3} & \frac{\partial D}{\partial \hat{d}_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1–23}$$

   Po zakonu o prenosu varianc in kovarianc dobimo variančno-kovariančno matriko neznanke $\mathbf{\Sigma}_D$ kot:

$$\mathbf{\Sigma}_D = \sigma_D^2 = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = 1{,}167 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \tag{1–24}$$

   Natančnost σ_D dobimo tako, da varianco iz enačbe (1–24) korenimo in dobimo $\sigma_D = 0{,}011\,\mathrm{m}$.

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Natančnosti popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj dobimo tako, da korenimo diagonalne elemente iz obeh kovariančnih matrik iz enačbe (1–22). Natančnosti vseh popravkov so enake, prav tako natančnosti vseh izravnanih opazovanj:
   $$\sigma_{v_i} = 0{,}019\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{d}_i} = 0{,}011\,\mathrm{m} \qquad i = \{1,2,3,4\} \tag{1–25}$$
   Iz obeh kovariančnih matrik $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ iz enačbe (1–22), kot tudi iz obeh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$ iz enačbe (1–20), lahko vidimo, da so popravki med seboj korelirani, prav tako so tudi izravnana opazovanja. Korelacije so:
   $$\rho_{v_i v_j} = -0{,}33 \qquad \sigma_{\hat{d}_i \hat{d}_j} = 1{,}00 \qquad i,j = \{1,2,3,4\} \wedge i \neq j \tag{1–26}$$

1.5.2 Rešitev s posredno izravnavo

Tudi tu bomo šli po korakih iz poglavja 1.1, za postopek posredne izravnave pa glejte poglavje *Posredna izravnava po MNK* in vse primere tega poglavja prejšnjega leta.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Pri izmerjenih $n = 4$ dolžinah, kjer bi za enolično določitev dolžine D potrebovali le $n_0 = 1$ opazovanje, bomo nastavili $u = 1$ neznank, in sicer $\mathbf{x} = [D]$. Sestavimo $n = 4$ enačb popravkov, ki imajo obliko:
   $$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{d}_1 - D = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{d}_2 - D = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d}_3 - D = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{d}_4 - D = 0 \end{aligned} \tag{1–27}$$
   Enačbe (1–27) zapišemo v osnovni matrični obliki posredne izravnave, kjer za približno vrednost neznanke izberemo $D_0 = 0{,}00\,\mathrm{m}$:
   $$\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32{,}51\,\mathrm{m} \\ -32{,}48\,\mathrm{m} \\ -32{,}52\,\mathrm{m} \\ -32{,}53\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–28}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, sta matrika kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in matrika uteži $\mathbf{P}$ enotski matriki, velikosti 4×4.

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave predstavljajo trije vektorji:
   $$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 32{,}51\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}03\,\mathrm{m} \\ -0{,}01\,\mathrm{m} \\ -0{,}02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}51\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–29}$$
   Dolžino D dobimo tako, da približni vrednosti D_0 prištejemo popravek iz vektorja $\mathbf{\Delta} = [\delta D]$ in dobimo:
   $$D = D_0 + \delta D = 32{,}51\,\mathrm{m} \tag{1–30}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun vseh treh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, in sicer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1–31}$$

   Iz prve enačbe (izračun $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$) vidimo, da je vrednost enaka $0{,}25 = 1/n = 1/4$.

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 4{,}667 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \\
\hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0{,}022\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{1–32}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
   Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe (1–32), z njo izračunamo vse iskane kovariančne matrike ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Matrike kofaktorjev iz enačbe (1–31) pomnožimo z varianco iz enačbe (1–32) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} 1{,}167 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\
\mathbf{\Sigma}_{vv} &= \begin{bmatrix} 3{,}500 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} \\ -1{,}167 \times 10^{-4} & 3{,}500 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} \\ -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & 3{,}500 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} \\ -1{,}167 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} & 3{,}500 \times 10^{-4} & -1{,}167 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \\
\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} \\ 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} \\ 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} \\ 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} & 1{,}167 \times 10^{-4} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1–33}$$

   Tu vidimo prednost posredne izravnave pred pogojno izravnavo. V primeru posredne izravnave dobimo vrednost neznanke neposredno ($\mathbf{\Delta}$), prav tako tudi kovariančno matriko neznank ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$). Dodatnega izračuna neznank in njihovih natančnosti ni potreben.

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Spet korenimo vse diagonalne elemente vseh kovariančnih matrik iz enačbe (1–33). Za neznanko dobimo:

$$\sigma_D = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\Delta}}} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 0{,}011\,\mathrm{m} \tag{1–34}$$

Enačba (1–34) opisuje, kako dobimo natančnost dolžine D pri posredni izravnavi po MNK. Vemo, da $\hat{\sigma}_0$ predstavlja natančnost opazovanj in σ_D dobimo tako, da natančnost opazovanj delimo s korenom števila opazovanj. Iz tega sledi, da je natančnost σ_D premo sorazmerna z natančnostjo opazovanj in obratno sorazmerna s številom opazovanj. Večkrat kot izmerimo dolžino (ko n narašča), bolj natančno dobimo izravnano dolžino D. Teoretično to pomeni, da lahko s ponovljenimi izmerami iste količine pridemo do poljubne natančnosti izravnane vrednosti. A paziti moramo, da v opazovanjih nimamo ne grobih ne sistematičnih pogreškov.

Kar se tiče popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj, pa velja enako kot v primeru pogojne izravnave. Dobimo:

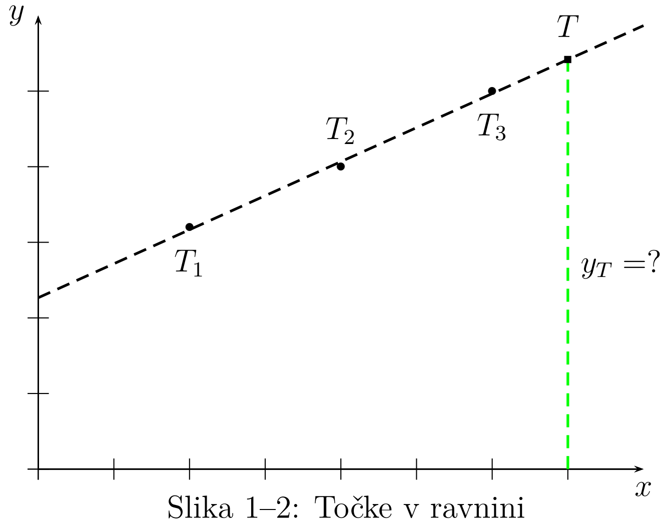
$$\sigma_{v_i} = 0{,}019\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{d}_i} = 0{,}011\,\mathrm{m} \qquad i = \{1, 2, 3, 4\} \tag{1–35}$$

Tudi korelacije bodo enake, lahko vidimo, da so popravki med seboj korelirani, prav tako so tudi izravnana opazovanja. Korelacije so:

$$\rho_{v_i v_j} = -0{,}33 \qquad \sigma_{\hat{d}_i \hat{d}_j} = 1{,}00 \qquad i, j = \{1, 2, 3, 4\} \wedge i \neq j \tag{1–36}$$

1.6 Primer 2 – premica v ravnini

V ravnini imamo tri točke, za katere imamo dane koordinate x, koordinate y pa so opazovane, $T_1(x_1; y_1) = (2{,}0; 3{,}2)$, $T_2(x_2; y_2) = (4{,}0; 4{,}0)$ in $T_3(x_3; y_3) = (6{,}0; 5{,}0)$, kot prikazuje slika 1–2. Če je bila koordinata y_3 izmerjena dvakrat bolj natančno kot ostali dve, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice, ki se optimalno prilega podanim točkam. Izračunaj tudi natančnost določenih parametrov premice. Izračunaj koordinato y_T za točko T, ki ima $x_T = 7{,}0$ ter njeno natančnost σ_{y_T}.



Slika 1–2: Točke v ravnini

1.6.1 Rešitev s posredno izravnavo

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Izmerjene imamo koordinate y točk, torej $n = 3$. Za enolično določitev premice potrebujemo $n_0 = 2$ opazovanj, zato imamo $r = 1$ opazovanj. Uvedemo $u = 2$ neznank, ki sta ravno parametra premice, torej $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Enačbe popravkov sestavimo v obliki:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - a\,x_1 - b = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - a\,x_2 - b = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - a\,x_3 - b = 0 \end{aligned} \tag{1–37}$$

   Enačbe (1–37) zapišemo v osnovni matrični obliki posredne izravnave, kjer za približno vrednost neznanke izberemo $a_0 = b_0 = 0{,}0$. Dobimo:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2{,}0 & -1{,}0 \\ -4{,}0 & -1{,}0 \\ -6{,}0 & -1{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}2 \\ -4{,}0 \\ -5{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–38}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Opazovanja so različne natančnosti, ne vemo pa, kakšne te natančnosti so. Vemo le, da je natančnost koordinate y_3 dvakrat večja od natančnosti ostalih dveh koordinat y_1 in y_2. Če si izberemo za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_{y_1}^2$, bosta matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}$ in uteži $\mathbf{P}$ opazovanj enaki:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}25 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{1–39}$$

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave predstavljajo trije vektorji:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0{,}4571 \\ 2{,}2476 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0{,}038 \\ 0{,}076 \\ -0{,}010 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3{,}162 \\ 4{,}076 \\ 4{,}990 \end{bmatrix} \tag{1–40}$$

Končna parametra premice a in b dobimo tako, da popravka parametra iz vektorja $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe (1–40) prištejemo približnim vrednostim. Ker sta približni vrednosti enaki 0,0, dobimo seveda kar vektor $\boldsymbol{\Delta}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0{,}4571 \\ 2{,}2476 \end{bmatrix} \tag{1–41}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun vseh treh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, in sicer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 7{,}143 \times 10^{-2} & -3{,}571 \times 10^{-1} \\ -3{,}571 \times 10^{-1} & 1{,}952 \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{vv} &= \mathbf{Q} - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1{,}905 \times 10^{-1} & -3{,}810 \times 10^{-1} & 4{,}762 \times 10^{-2} \\ -3{,}810 \times 10^{-1} & 7{,}619 \times 10^{-1} & -9{,}524 \times 10^{-2} \\ 4{,}762 \times 10^{-2} & -9{,}524 \times 10^{-2} & 1{,}190 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} 8{,}095 \times 10^{-1} & 3{,}810 \times 10^{-1} & -4{,}762 \times 10^{-2} \\ 3{,}810 \times 10^{-1} & 2{,}381 \times 10^{-1} & 9{,}524 \times 10^{-2} \\ -4{,}762 \times 10^{-2} & 9{,}524 \times 10^{-2} & 2{,}381 \times 10^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1–42}$$

Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 7{,}619 \times 10^{-3} \\
\hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0{,}087
\end{aligned} \tag{1–43}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe (1–43), z njo izračunamo vse iskane kovariančne matrike ($\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{vv}$ in $\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Matrike kofaktorjev iz enačbe (1–42) pomnožimo z varianco iz enačbe (1–43) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} 5{,}442 \times 10^{-4} & -2{,}721 \times 10^{-3} \\ -2{,}721 \times 10^{-3} & 1{,}488 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\Sigma}_{vv} &= \begin{bmatrix} 1{,}451 \times 10^{-3} & -2{,}902 \times 10^{-3} & 3{,}628 \times 10^{-4} \\ -2{,}902 \times 10^{-3} & 5{,}805 \times 10^{-3} & -7{,}256 \times 10^{-4} \\ 3{,}628 \times 10^{-4} & -7{,}256 \times 10^{-4} & 9{,}070 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} 6{,}168 \times 10^{-3} & 2{,}902 \times 10^{-3} & -3{,}628 \times 10^{-4} \\ 2{,}902 \times 10^{-3} & 1{,}814 \times 10^{-3} & 7{,}256 \times 10^{-4} \\ -3{,}628 \times 10^{-4} & 7{,}256 \times 10^{-4} & 1{,}814 \times 10^{-3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1–44}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Za izračun natančnosti vseh količin, korenimo diagonalne elemente vseh kovariančnih matrik iz enačbe (1–44), korelacije pa dobimo iz izven-diagonalnih elementov matrik. Za neznanke dobimo:
$$\sigma_a = 0{,}023 \qquad \sigma_b = 0{,}122 \qquad \rho_{ab} = -0{,}96 \tag{1–45}$$
   Natančnosti in korelacije popravkov opazovanj so enake:
$$\begin{aligned} \sigma_{v_1} &= 0{,}038 & \sigma_{v_2} &= 0{,}076 & \sigma_{v_3} &= 0{,}010 \\ \rho_{v_1v_2} &= -1{,}00 & \rho_{v_1v_3} &= 1{,}00 & \rho_{v_2v_3} &= -1{,}00 \end{aligned} \tag{1–46}$$
   Natančnosti in korelacije izravnanih opazovanj pa so enake:
$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{y}_1} &= 0{,}079 & \sigma_{\hat{y}_2} &= 0{,}043 & \sigma_{\hat{y}_3} &= 0{,}043 \\ \rho_{\hat{y}_1\hat{y}_2} &= 0{,}87 & \rho_{\hat{y}_1\hat{y}_3} &= -0{,}11 & \rho_{\hat{y}_2\hat{y}_3} &= 0{,}40 \end{aligned} \tag{1–47}$$

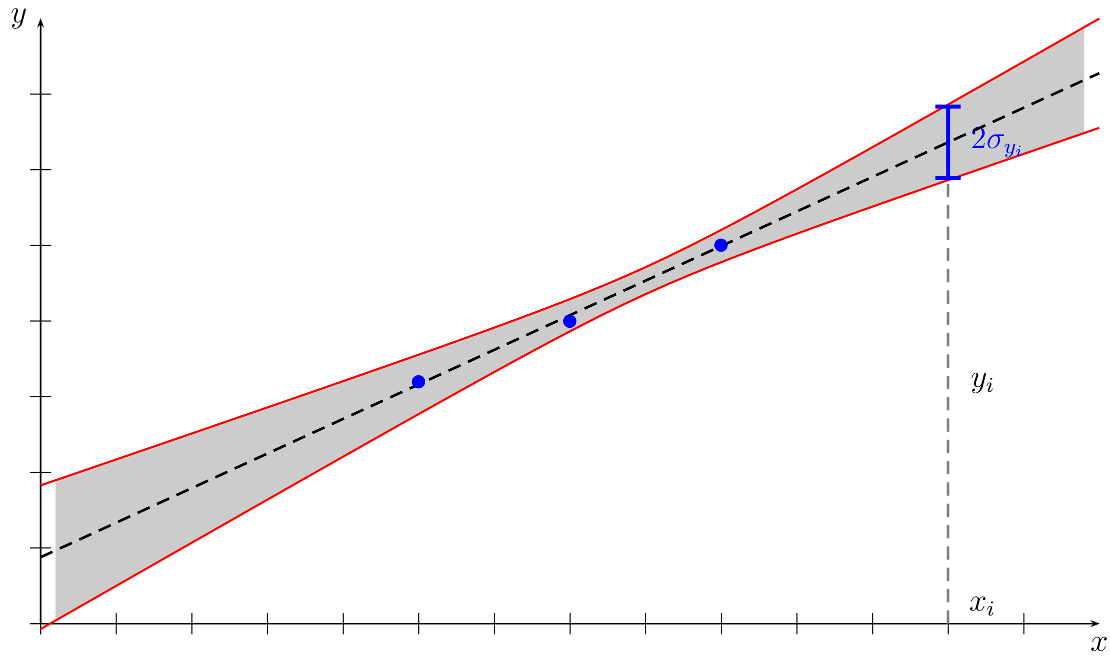
Na koncu izračunajmo še y_T in njeno natančnost σ_{y_T}. Izračun koordinate y_T je enak:
$$y_T = a\,x_T + b = 5{,}448 \tag{1–48}$$

Kako izračunati natančnost σ_{y_T}? Uporabimo zakon o prenosu varianc in kovarianc, izhajamo iz enačbe (1–48), kjer ugotovimo, da smo za izračun y_T uporabili vektor $\mathbf{x}$, za katerega poznamo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$. Prvo nastavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$, ki ima obliko:
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_T}{\partial a} & \frac{\partial y_T}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–49}$$

Nato pa po zakonu o prenosu varianc in kovarianc izračunamo varianco $\sigma^2_{y_T}$ in nato še natančnost σ_{y_T}:
$$\sigma^2_{y_T} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = 3{,}447 \times 10^{-3} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{y_T} = 0{,}059 \tag{1–50}$$

Naloga, kot je prikazana v tem primeru, je zelo pogost primer uporabe MNK v geodeziji in se nanaša na interpolacijo. Pri interpolaciji imamo na voljo le niz točk v ravnini (kot so tri točke v nalogi), kjer so po navadi za dane koordinate x izmerjene koordinate y. Predpostavlja se, da točke ležijo na neki krivulji (v našem primeru premici), ki ji ne poznamo enačbe. Zato z MNK poskušamo geometrijo te krivulje oceniti z enostavnimi funkcijami (premica, polinomi in podobno), cilj pa je, da lahko za poljubno koordinato x izračunamo koordinato y (v nalogi smo za x_T nato računali y_T). Drug zelo pomemben rezultat pa je tudi ocena kakovosti interpolirane vrednosti koordinate y.

V našem primeru predpostavljamo, da točke ležijo na premici, zato smo izračunali premico, ki se optimalno prilega točkam (na sliki črtkana črna črta), kot to prikazuje slika 1–3. Na osnovi enačbe te premice lahko za vsako koordinato x izračunamo (interpoliramo) vrednost koordinate y. Ko računamo vrednost y za tak x, ki leži znotraj podanih točk, temu pravimo interpolacija, če pa x leži izven točk (kot je to primer na sliki spodaj – siva črtkana črta), pa temu rečemo ekstrapolacija. Kakovost interpoliranih točk je podana s sivim območjem, ki je omejeno z rdečima krivuljama. Takoj lahko vidimo, da je sivo območje ožje tam, kjer so točke in se razširja z oddaljevanjem od točk. Posledica je, da so interpolirane točke veliko boljše kakovosti, kot ekstrapolirane točke. Kako pa določimo natančnost interpoliran/ekstrapolirane točke? Le-ta je prikazana z modrim intervalom za interpolirano vrednost y_i.



Slika 1–3: Prikaz interpolacijske premice in natančnosti interpoliranih točk na premici

1.6.2 Rešitev s pogojno izravnavo

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Ker imamo $n = 3$ opazovanjih koordinat y točk premice in bi potrebovali $n_0 = 2$ koordinat y za enolično določitev premice, imamo $r = 1$ nadštevilnih opazovanj, kar nam določi število pogojnih enačb. Pogoj, ki mu morajo opazovanja (koordinate y) in konstante (koordinate x) zadoščati zapišemo v pogojni enačbi kot:

$$F_1 \equiv \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} = \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} \tag{1–51}$$

   Če enačbo (1–51) preuredimo, dobimo končno obliko:

$$F_1 \equiv \hat{y}_1 \frac{1}{x_2 - x_1} - \hat{y}_2 \left(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_2} \right) + \hat{y}_3 \frac{1}{x_3 - x_2} = 0 \tag{1–52}$$

   Če vektor opazovanj $\mathbf{l}$ privzamemo enako kot pri posredni izravnavi (poglavje 1.6.1, glej enačbi (1–37) in (1–38)), potem pogojno enačbo (1–52) lahko zapišemo v osnovni matrični $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$ obliki pogojne izravnave izravnave, kjer dobimo:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{x_2-x_1} & -\left(\frac{1}{x_2-x_1} + \frac{1}{x_3-x_2}\right) & \frac{1}{x_3-x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(y_1 \frac{1}{x_2-x_1} - y_2 \left(\frac{1}{x_2-x_1} + \frac{1}{x_3-x_2}\right) + y_3 \frac{1}{x_3-x_2}) \end{bmatrix} \tag{1–53}$$

   Če v enačbo (1–53) vstavimo numerične vrednosti opazovanj in konstant, dobimo:

$$\begin{bmatrix} 0{,}50 & -1{,}00 & 0{,}50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}10 \end{bmatrix} \tag{1–54}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Privzamemo isti stohastični model kot pri posredni izravnavi, kot je to v enačbi (1–39).

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela pogojne izravnave predstavljata vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0{,}038\,\mathrm{m} \\ 0{,}076\,\mathrm{m} \\ -0{,}010\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3{,}162\,\mathrm{m} \\ 4{,}076\,\mathrm{m} \\ 4{,}990\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–55}$$

   Dobimo seveda iste rezultate kot pri posredni izravnavi (enačba (1–40)).

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun obeh matrik kofaktorjev, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 1{,}905 \times 10^{-1} & -3{,}810 \times 10^{-1} & 4{,}762 \times 10^{-2} \\ -3{,}810 \times 10^{-1} & 7{,}619 \times 10^{-1} & -9{,}524 \times 10^{-2} \\ 4{,}762 \times 10^{-2} & -9{,}524 \times 10^{-2} & 1{,}190 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} &= \begin{bmatrix} 8{,}095 \times 10^{-1} & 3{,}810 \times 10^{-1} & -4{,}762 \times 10^{-2} \\ 3{,}810 \times 10^{-1} & 2{,}381 \times 10^{-1} & 9{,}524 \times 10^{-2} \\ -4{,}762 \times 10^{-2} & 9{,}524 \times 10^{-2} & 2{,}381 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1–56}$$

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 7{,}619 \times 10^{-3} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0{,}087 \end{aligned} \tag{1–57}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
   Za izračun uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2 in z njo izračunamo obe iskani kovariančni matriki ($\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Matrike kofaktorjev iz enačbe (1–56) pomnožimo z σ_0^2 in dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_{vv} &= \begin{bmatrix} 1{,}451 \times 10^{-3} & -2{,}902 \times 10^{-3} & 3{,}628 \times 10^{-4} \\ -2{,}902 \times 10^{-3} & 5{,}805 \times 10^{-3} & -7{,}256 \times 10^{-4} \\ 3{,}628 \times 10^{-4} & -7{,}256 \times 10^{-4} & 9{,}070 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} 6{,}168 \times 10^{-3} & 2{,}902 \times 10^{-3} & -3{,}628 \times 10^{-4} \\ 2{,}902 \times 10^{-3} & 1{,}814 \times 10^{-3} & 7{,}256 \times 10^{-4} \\ -3{,}628 \times 10^{-4} & 7{,}256 \times 10^{-4} & 1{,}814 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1–58}$$

   Tudi tu dobimo, seveda, iste rezultate kot pri posredni izravnavi.

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Glede na to, da smo dobili enaki kovariančni matriki v enačbi (1–58) kot pri posredni izravnavi, bodo seveda enake tudi natančnosti in korelacije, ki bi jih izračunali iz obeh matrik. Rezultati so tako podani v enačbah (1–46) in (1–47).

Rešitev pogojne izravnave po MNK so popravki in izravnana opazovanja in pripadajoče kovariančne matrike. Naloga pa od nas zahteva enačbo premice, ki se optimalno prilega točkam in interpolacija s pomočjo premice pri vrednosti $x_T = 7{,}0$. Naloga je dokaj enostavna in sestavljena iz dveh korakov:

1. Izračun parametrov premice (a in b) s pripadajočo variančno-kovariančno matriko ($\mathbf{\Sigma}_{ab}$), uporabimo zakon o prenosi varianc in kovarianc.

2. Ko imamo določeno optimalno premico, izračunamo vrednost y_T in njeno natančnost, kjer še enkrat uporabimo zakon o prenosu varianc in kovarianc. Podatki tu so rezultati prejšnje alineje.

Pokažimo pa tu, kako lahko obe zgoraj podani alineji izvedemo v enem koraku. Kot prvo je potrebno pokazati, kako se vse tri količine izračunajo. Seveda izhajamo iz izravnanih opazovanj, torej vektorja $\hat{\mathbf{l}}$ iz enačbe (1–55)

$$a = \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} \qquad b = \hat{y}_1 - a x_1 \qquad y_T = a x_T + b \tag{1–59}$$

Iz enačbe (1–59) lahko vidimo, da se a izračuna na osnovi izravnanih opazovanj (in konstant), za b se uporabi tudi a, medtem ko se za y_T uporabita tako a kot tudi b. Če vse tri enačbe zapišemo tako, da bodo na levi strani samo računane količine (a, b in y_T), na desni pa samo še izravnana opazovanja ($\hat{\mathbf{l}}$) in konstante (koordinate x), dobimo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} = 0{,}4571 \\ b &= \hat{y}_1 - \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} x_1 = 2{,}2476 \\ y_T &= \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} x_T + \hat{y}_1 - \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} x_1 = 5{,}4476 \end{aligned} \tag{1–60}$$

Enačbe (1–60) so osnova za prenos varianc in kovarianc, da dobimo variančno-kovariančno matriko vseh treh neznank ($\mathbf{\Sigma}_{xx}$). Prvo odvajamo vse tri opazovanja po vseh izravnanih opazovanjih, da dobimo matriko $\mathbf{J}$, ki je enaka:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0{,}5000 & 0{,}5000 & 0{,}0000 \\ 2{,}0000 & -1{,}0000 & 0{,}0000 \\ -1{,}5000 & 2{,}5000 & 0{,}0000 \end{bmatrix} \tag{1–61}$$

Izračun variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ sledi osnovni enačbi zakona o prenosu varianc in kovarianc, in sicer:

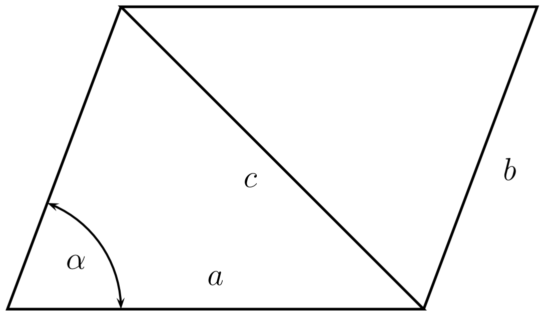
$$\mathbf{\Sigma}_{xx} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5{,}442 \times 10^{-4} & -2{,}721 \times 10^{-3} & 1{,}088 \times 10^{-3} \\ -2{,}721 \times 10^{-3} & 1{,}488 \times 10^{-2} & -4{,}172 \times 10^{-3} \\ 1{,}088 \times 10^{-3} & -4{,}172 \times 10^{-3} & 3{,}447 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \tag{1–62}$$

Natančnosti in korelacije med vsemi neznankami iz variančno-kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ iz enačbe (1–62) so:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 0{,}023 & \sigma_b &= 0{,}122 & \sigma_{y_T} &= 0{,}059 \\ \rho_{ab} &= -0{,}956 & \rho_{ay_T} &= 0{,}795 & \rho_{by_T} &= -0{,}583 \end{aligned} \tag{1–63}$$

1.7 Primer 3 – parcela oblike paralelograma

Parcela ima obliko paralelograma, v kateri smo izmerili tri stranice in en kot, kot prikazuje slika 1–4. Opazovanja so : $a = 8{,}0\,\mathrm{m}$, $b = 6{,}0\,\mathrm{m}$, $c = 7{,}1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = 5{,}0\,\mathrm{cm}$) in $\alpha = 60°$ ($\sigma_\alpha = 30'$). Izravnaj opazovanja s pogojno izravnavo po MNK in izračunaj površino parcele. Izračunaj tudi natančnosti vseh računanih količin in pripadajoče korelacije. Za izračun natančnosti uporabi referenčno varianco a-priori σ_0^2.



Slika 1–4: Skica parcele in izmerjenih opazovanj

1.7.1 Rešitev s pogojno izravnavo

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Pri parceli oblike paralelograma imamo $n = 4$ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali $n_0 = 3$. Število nadštevilnih opazovanj je torej $r = 1$, kar določa število pogojnih enačb, ki ima obliko:

$$F_1 \equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - 2\hat{a}\hat{b}\cos\hat{\alpha} - \hat{c}^2 = 0 \tag{1–64}$$

   Če nastavimo vektor opazovanj $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a & b & c & \alpha \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, potem pogojno enačbo (1–64) lahko zapišemo v osnovni matrični obliki pogojne izravnave izravnave, kjer dobimo:

$$\mathbf{Av} = \mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 10{,}00 & 4{,}00 & -14{,}20 & 83{,}14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}59 \end{bmatrix} \tag{1–65}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Opazovanja so različne natančnosti, ki so tudi podane. Če nastavimo za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_a^2$, potem bodo kofaktorji q_i in uteži p_i opazovanj enake:

$$\begin{matrix} q_a = 1 & q_b = 1 & q_c = 1 & q_\alpha = 0{,}0305 \\ p_a = 1 & p_b = 1 & p_c = 1 & p_\alpha = 32{,}8281 \end{matrix} \tag{1–66}$$

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela pogojne izravnave predstavljata vektorja popravkov opazovanj in vektor izravnanih opazovanj:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0{,}030\,\mathrm{m} \\ -0{,}012\,\mathrm{m} \\ 0{,}043\,\mathrm{m} \\ -0{,}00762 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7{,}970\,\mathrm{m} \\ 5{,}988\,\mathrm{m} \\ 7{,}143\,\mathrm{m} \\ 1{,}03957 \end{bmatrix} \tag{1–67}$$

Popravki opazovanj in izravnana opazovanja iz enačbe (1–67) so podani v metrih za stranice in v radianih za kot α. Popravek kota in izravnan kot v seksagezimalnem sistemu sta $v_\alpha = -26{,}21'$ in $\hat{\alpha} = 59°33'47{,}51''$.

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun obeh matrik kofaktorjev, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, kjer dobimo:

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{QA}^{\mathrm{T}}\mathbf{PeAQ} = \begin{bmatrix} 1{,}893\times10^{-1} & 7{,}573\times10^{-2} & -2{,}688\times10^{-1} & 4{,}795\times10^{-2} \\ 7{,}573\times10^{-2} & 3{,}029\times10^{-2} & -1{,}075\times10^{-1} & 1{,}918\times10^{-2} \\ -2{,}688\times10^{-1} & -1{,}075\times10^{-1} & 3{,}818\times10^{-1} & -6{,}809\times10^{-2} \\ 4{,}795\times10^{-2} & 1{,}918\times10^{-2} & -6{,}809\times10^{-2} & 1{,}214\times10^{-2} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} = \begin{bmatrix} 8{,}107\times10^{-1} & -7{,}573\times10^{-2} & 2{,}688\times10^{-1} & -4{,}795\times10^{-2} \\ -7{,}573\times10^{-2} & 9{,}697\times10^{-1} & 1{,}075\times10^{-1} & -1{,}918\times10^{-2} \\ 2{,}688\times10^{-1} & 1{,}075\times10^{-1} & 6{,}182\times10^{-1} & 6{,}809\times10^{-2} \\ -4{,}795\times10^{-2} & -1{,}918\times10^{-2} & 6{,}809\times10^{-2} & 1{,}832\times10^{-2} \end{bmatrix} \tag{1–68}$$

Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pv}}{n-n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pv}}{r} = 4{,}786\times10^{-3}$$
$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0{,}069 \tag{1–69}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
Za izračun uporabimo referenčno varianco a-priori σ_0^2 in z njo izračunamo obe iskani kovariančni matriki ($\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Matrike kofaktorjev iz enačbe (1–68) pomnožimo z σ_0^2 in dobimo:

$$\mathbf{\Sigma}_{vv} = \begin{bmatrix} 4{,}733\times10^{-4} & 1{,}893\times10^{-4} & -6{,}721\times10^{-4} & 1{,}199\times10^{-4} \\ 1{,}893\times10^{-4} & 7{,}573\times10^{-5} & -2{,}688\times10^{-4} & 4{,}795\times10^{-5} \\ -6{,}721\times10^{-4} & -2{,}688\times10^{-4} & 9{,}544\times10^{-4} & -1{,}702\times10^{-4} \\ 1{,}199\times10^{-4} & 4{,}795\times10^{-5} & -1{,}702\times10^{-4} & 3{,}036\times10^{-5} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} = \begin{bmatrix} 2{,}027\times10^{-3} & -1{,}893\times10^{-4} & 6{,}721\times10^{-4} & -1{,}199\times10^{-4} \\ -1{,}893\times10^{-4} & 2{,}424\times10^{-3} & 2{,}688\times10^{-4} & -4{,}795\times10^{-5} \\ 6{,}721\times10^{-4} & 2{,}688\times10^{-4} & 1{,}546\times10^{-3} & 1{,}702\times10^{-4} \\ -1{,}199\times10^{-4} & -4{,}795\times10^{-5} & 1{,}702\times10^{-4} & 4{,}580\times10^{-5} \end{bmatrix} \tag{1–70}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
Za izračun natančnosti vseh količin, korenimo diagonalne elemente vseh kovariančnih matrik iz enačbe (1–70), korelacije pa dobimo iz izven-diagonalnih elementov matrik. Natančnosti popravkov opazovanj so enake:

$$\sigma_{v_a} = 0{,}022\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{v_b} = 0{,}009\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{v_c} = 0{,}031\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{v_\alpha} = 18{,}9' \tag{1–71}$$

Korelacije pa zapišimo v pregledni obliki kot:

	v_a	v_b	v_c	v_α
v_a	1,00			
v_b	1,00	1,00		
v_c	$-1{,}00$	$-1{,}00$	1,00	
v_α	1,00	1,00	$-1{,}00$	1,00

Iz zgornje preglednice je razvidno, da so vsi popravki med seboj popolnoma korelirani, korelacija je bodisi 1 bodisi -1. Kljub temu, da ta rezultat zgleda presenetljivo, ni s teoretičnega stališča nič posebnega. Lahko se pokaže, da je rang matrike $\mathbf{Q}_{vv}$ enak $rang(\mathbf{Q}_{vv}) = r = 1$, kar pomeni, da je samo en popravek neodvisen, ostali trije pa so odvisni popravki.

Izpišimo še natančnosti izravnanih opazovanj, ki so:

$$\sigma_{\hat{a}} = 0{,}045\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{b}} = 0{,}049\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{c}} = 0{,}039\,\mathrm{m} \qquad \sigma_{\hat{\alpha}} = 23{,}3' \tag{1–72}$$

Korelacije med izravnanimi opazovanji izpišimo na enak način, kot pri popravkih:

	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	$\hat{\alpha}$
$\hat{a}$	1,00			
$\hat{b}$	$-0{,}09$	1,00		
$\hat{c}$	0,38	0,14	1,00	
$\hat{\alpha}$	$-0{,}39$	$-0{,}14$	0,64	1,00

Ker pa velja, da je $rang(\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}) = n_0 = 3$, pomeni, da je samo eno izravnano opazovanje odvisno, tri so na neodvisna. Zato so korelacije med izravnanimi opazovanji različne od 1 ali -1, kot to velja za popravke opazovanj.

Naloga od nas zahteva še izračun površine S parcele in njene natančnosti σ_S. Izhajamo iz izravnanih opazovanj in površino S parcele, ki je oblike paralelograma, izračunamo kot:

$$S = \hat{a}\hat{b}\sin\hat{\alpha} = 41{,}1\,\mathrm{m}^2 \tag{1–73}$$

Natančnost bomo tudi tu izračunali s pomočjo zakona o prenosu varianc in kovarianc. Izhajamo iz vektorja izravnanih opazovanj $\hat{l}$ iz enačbe (1–67), za katerega imamo izračunano kovariančno matriko v enačbi (1–70), funkcijska povezava pa je določena v enačbi (1–73). Za izračunano natančnost površine dobimo:

$$\sigma_S = 0{,}4\,\mathrm{m}^2 \tag{1–74}$$

1.7.2 Rešitev s posredno izravnavo

Rešitev po posredni izravnavi bomo prikazali v krajši obliki, saj je večina količin definirana in predstavljena že v poglavju izračuna primera s pogojno izravnavo (glej 1.7.1).

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Število opazovanj je $n = 4$, kjer bi nujno potrebovali $n_0 = 3$, zato je število neznank enako $u = 3$. Za neznanke si izberemo take količine, da bodo izračuni čim lažji, primer so:

$$x : a \qquad y : b \qquad A : \alpha \tag{1–75}$$

   Na osnovi uvedenih neznank iz enačbe (1–75) sestavimo enačbe opazovanj v obliki:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - x = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{b} - y = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{c} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos A} = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{\alpha} - A = 0 \end{aligned} \tag{1–76}$$

   Matrični model posredne izravnave ima obliko:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & -1{,}000 & 0{,}000 \\ -0{,}693 & -0{,}277 & -5{,}765 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & -1{,}000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}000 \\ 0{,}000 \\ 0{,}111 \\ 0{,}000 \end{bmatrix} \tag{1–77}$$

   pri tem pa smo vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ nastavili kot:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}000 \\ 6{,}000 \\ 1{,}047198 \end{bmatrix} \tag{1–78}$$

   Približne vrednosti neznank iz enačbe (1–78) so uporabljene za izračun parcialnih odvodov enačb opazovanj iz enačbe (1–76), s čimer dobimo elemente matrike $\mathbf{B}$ v matrični enačbi (1–77).

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Stohastičen model je identične kot v primeru pogojne izravnave, glej poglavje 1.7.1 in enačbo (1–66).

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela pogojne izravnave predstavljajo trije vektorji, vektor popravkov približnih neznank $\boldsymbol{\Delta}$, vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ in in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$. Ker imamo vektorja $\mathbf{v}$ in $\hat{\mathbf{l}}$ že izračunana v enačbi (1–67), tu prikazujemo samo vektor $\boldsymbol{\Delta}$ in vektor končnih vrednosti neznank $\mathbf{x}$:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} -0{,}030\,\mathrm{m} \\ -0{,}012\,\mathrm{m} \\ -0{,}007591 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 7{,}970\,\mathrm{m} \\ 5{,}988\,\mathrm{m} \\ 1{,}039606 \end{bmatrix} \tag{1–79}$$

   Popravka približnih vrednosti in končni vrednosti prvih dveh neznank, x in y, iz enačbe 1–79 so podane v metrih, medtem ko sta popravek in končna vrednost neznanke A podana v radianih. Popravek kota in izravnan kot sta $\delta A = -26{,}10'$ in $A = 59°33'54{,}16''$.

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Tudi v tem primeru bomo prikazali samo rešitev stohastičnega modela za neznanke, saj so

rešitve za popravke opazovanj in izravnana opazovanja podana v poglavju 1.7.1 (glej enačbo (1–68)). Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun obeh matrik kofaktorjev, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, kjer dobimo:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 8{,}129 \times 10^{-1} & -7{,}483 \times 10^{-2} & -4{,}738 \times 10^{-2} \\ -7{,}483 \times 10^{-2} & 9{,}701 \times 10^{-1} & -1{,}895 \times 10^{-2} \\ -4{,}738 \times 10^{-2} & -1{,}895 \times 10^{-2} & 1{,}846 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \tag{1–80}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
Izračun referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčnega standardnega odklona a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ je podan v enačbi (1–69), variančno-kovariančna matrika neznank $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ je enaka:

$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 2{,}032 \times 10^{-3} & -1{,}871 \times 10^{-4} & -1{,}184 \times 10^{-4} \\ -1{,}871 \times 10^{-4} & 2{,}425 \times 10^{-3} & -4{,}738 \times 10^{-5} \\ -1{,}184 \times 10^{-4} & -4{,}738 \times 10^{-5} & 4{,}616 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \tag{1–81}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
Za izračun natančnosti neznank, korenimo diagonalne elemente kovariančne matrike iz enačbe 1–81, korelacije pa dobimo iz izvendiagonalnih elementov matrik.

$$\sigma_x = 0{,}045\,\mathrm{m} \qquad \sigma_y = 0{,}049\,\mathrm{m} \qquad \sigma_A = 23{,}4' \tag{1–82}$$

Korelacije pa zapišimo v pregledni obliki kot:

	x	y	A
x	1,00		
x	−0,08	1,00	
A	−0,39	−0,14	1,00

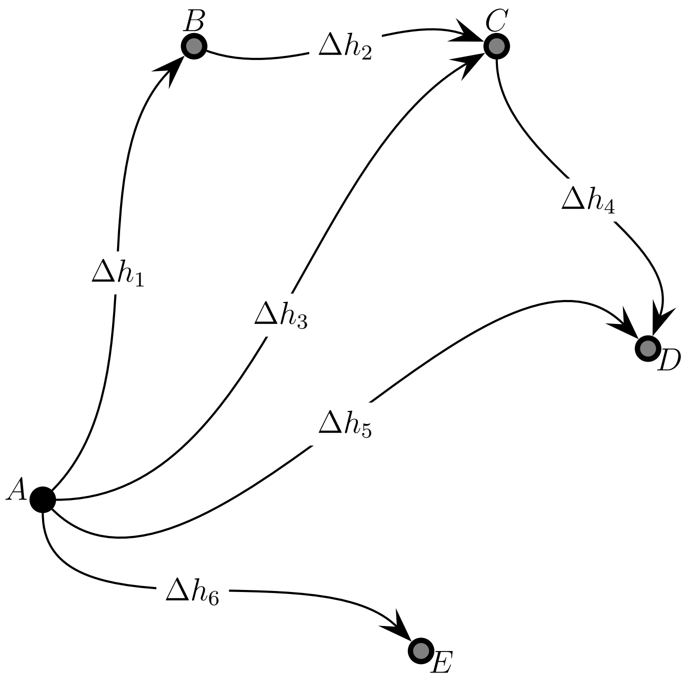
1.8 Primer 4 – višinska geodetska mreža

V nivelmanski mreži, kjer je višina točke A dana ($H_A = 320{,}0\,\text{m}$), smo opazovali višinske razlike in dolžine nivelmanskih linij, kakor jih prikazuje slika 1–5. Numerične vrednosti opazovanj so podane v preglednici 1–1.

Preglednica 1–1: Izmerjene vrednosti višinskih razlik med reperji

VIŠINSKA RAZLIKA	**DOLŽINA LINIJE**
$\Delta h_1 = 0{,}25\,\text{m}$	$\overline{AB} = 10\,\text{m}$
$\Delta h_2 = 0{,}30\,\text{m}$	$\overline{BC} = 20\,\text{m}$
$\Delta h_3 = 0{,}60\,\text{m}$	$\overline{AC} = 40\,\text{m}$
$\Delta h_4 = -0{,}15\,\text{m}$	$\overline{AD} = 15\,\text{m}$
$\Delta h_5 = 0{,}40\,\text{m}$	$\overline{CD} = 15\,\text{m}$
$\Delta h_6 = -0{,}15\,\text{m}$	$\overline{AE} = 10\,\text{m}$

S posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite izravnane vrednosti višin reperjev B, C, D in E. Izračunajte tudi natančnosti izravnanih višin σ_{H_B}, σ_{H_C}, σ_{H_D} in σ_{H_E}, ter vse njihove korelacije $\rho_{H_iH_j}$ $(i, j = B, C, D, E \wedge i \neq j)$.



Slika 1–5: Opazovane višinske razlike v višinski geodetski mreži

Posredna izravnava tega primera je detajlno prikazana v poglavju *Posredna izravnava po metodi najmanjših kvadratov* lanskega leta, in sicer kot *Primer 9 - Višinska geodetska mreža*, ko smo obravnavali posredno izravnavo.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Vidimo, da imamo $n = 6$ opazovanj, kjer želimo določiti višine štirim reperjem ($n_0 = 4$). Uve-

demo $u = 4$, najbolj smiselno, da so to kar višine točk $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_B & H_C & H_D & H_E \end{bmatrix}^\mathrm{T}$. Sestavimo enačbe popravkov, ki povezujejo (izravnana) opazovanja in neznanke:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \Delta\hat{h}_1 - H_B + H_A = 0 \\ F_2 &\equiv \Delta\hat{h}_2 - H_C + H_B = 0 \\ F_3 &\equiv \Delta\hat{h}_3 - H_C + H_A = 0 \\ F_4 &\equiv \Delta\hat{h}_4 - H_D + H_C = 0 \\ F_5 &\equiv \Delta\hat{h}_5 - H_D + H_A = 0 \\ F_6 &\equiv \Delta\hat{h}_6 - H_E + H_A = 0 \end{aligned} \tag{1–83}$$

Enačbe (1–83) zapišemo v osnovni matrični obliki posredne izravnave, vendar moramo prvo nastaviti približne vrednosti neznank:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_{B,0} \\ H_{C,0} \\ H_{D,0} \\ H_{E,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_A + \Delta h_1 \\ H_A + \Delta h_3 \\ H_A + \Delta h_5 \\ H_A + \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320{,}25\,\mathrm{m} \\ 320{,}60\,\mathrm{m} \\ 320{,}40\,\mathrm{m} \\ 319{,}85\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–84}$$

Linearizirane enačbe popravkov iz enačbe (1–83), ob upoštevanju približnih vrednosti neznank iz enačbe (1–84), so oblike $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$ in imajo obliko:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta H_B \\ \delta H_C \\ \delta H_D \\ \delta H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}05\,\mathrm{m} \\ 0{,}00\,\mathrm{m} \\ -0{,}05\,\mathrm{m} \\ 0{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}00\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–85}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Ker imamo podane dolžine nivelmanskih linij, so opazovanja različnih natančnosti. Pri geometričnem nivelmanu nastavimo matriko uteži, ki ima po diagonali kar inverzne vrednosti dolžin nivelmanskih linij. Uteži opazovanj so enake:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0{,}100 \quad p_2 = 0{,}050 \quad p_3 = 0{,}025 \\ p_4 &= 0{,}067 \quad p_5 = 0{,}067 \quad p_6 = 0{,}100 \end{aligned} \tag{1–86}$$

   V tem primeru se nismo potrudili, da bi bile uteži cela števila. Razloga za to sta dva. Prvi je, da ne računamo na roko, zato je vseeno, kakšne so numerične vrednosti. Drugi pa je v tem, da nastavimo pravilne enote za uteži. Utež posameznega opazovanja je dobljena kot $p_i = 1/d_i$ in ima enoto $[\mathrm{m}^{-1}]$. Ta enota bo pomembna pri izračunu referenčne variance a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ v nadaljevanju.

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.

Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave predstavljajo trije vektorji:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 0{,}0045\,\mathrm{m} \\ -0{,}0364\,\mathrm{m} \\ 0{,}0068\,\mathrm{m} \\ 0{,}0000\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4{,}5\,\mathrm{mm} \\ 9{,}1\,\mathrm{mm} \\ -36{,}4\,\mathrm{mm} \\ -6{,}8\,\mathrm{mm} \\ 6{,}8\,\mathrm{mm} \\ 0{,}0\,\mathrm{mm} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}2545\,\mathrm{m} \\ 0{,}3091\,\mathrm{m} \\ 0{,}5636\,\mathrm{m} \\ -0{,}1568\,\mathrm{m} \\ 0{,}4068\,\mathrm{m} \\ -0{,}1500\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–87}$$

Če približni vrednostim neznank iz enačbe (1–84) prištejemo njihove popravke iz vektorja $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–87), dobimo izravnane višine novih reperjev:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320{,}2545\,\mathrm{m} \\ 320{,}5636\,\mathrm{m} \\ 320{,}4068\,\mathrm{m} \\ 319{,}8500\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–88}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun vseh treh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$. Ker nas v nalogi zanimajo le natančnosti višin novih reperjev, zapišimo rešitev stohastičnega modela le za neznanke:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 7{,}879 & 3{,}636 & 1{,}818 & 0{,}000 \\ 3{,}636 & 10{,}909 & 5{,}455 & 0{,}000 \\ 1{,}818 & 5{,}455 & 10{,}227 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 10{,}000 \end{bmatrix} \tag{1–89}$$

Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 2{,}2727 \times 10^{-5} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0{,}0048 \end{aligned} \tag{1–90}$$

V enačbi (1–90) ima referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ enote $[\mathrm{m}^2\,\mathrm{m}^{-1}]$, zato ima referenčni standardni odklon a-posteriori enote $[\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{m}}]$, oziroma če ga zapišemo kot $\hat{\sigma}_0 = 4{,}8\,\mathrm{mm}/\sqrt{\mathrm{m}}$, potem nam ta vrednost pove, kakšna je natančnost izmerjenih višin v milimetrih na vsak meter. V praksi zato matriko uteži velikokrat izračunamo tako, da dolžine nivelmanskih linij podajamo v [km] in dobimo natančnost višinskih razlik na dolžino linije [1km].

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane variančno-kovariančne matrike.
Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe (1–90), z njo izračunamo vse iskane kovariančne matrike ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$). Tudi tu bomo prikazali le kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, ki ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 1{,}7906 \times 10^{-4} & 8{,}2645 \times 10^{-5} & 4{,}1322 \times 10^{-5} & 0{,}0000 \\ 8{,}2645 \times 10^{-5} & 2{,}4793 \times 10^{-4} & 1{,}2397 \times 10^{-4} & 0{,}0000 \\ 4{,}1322 \times 10^{-5} & 1{,}2397 \times 10^{-4} & 2{,}3244 \times 10^{-4} & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 2{,}2727 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \tag{1–91}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Za izračun natančnosti vseh višin novih reperjev, korenimo diagonalne elemente kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ iz enačbe (1–91), korelacije pa dobimo iz izven-diagonalnih elementov matrike. Za natančnosti dobimo:

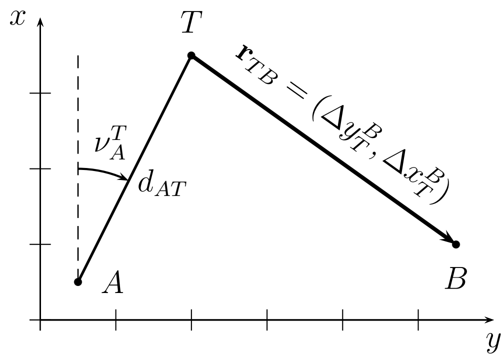
$$\sigma_{H_B} = 13{,}38\,\mathrm{mm} \quad \sigma_{H_C} = 15{,}75\,\mathrm{mm} \quad \sigma_{H_D} = 15{,}25\,\mathrm{mm} \quad \sigma_{H_E} = 15{,}08\,\mathrm{mm} \tag{1–92}$$

   Korelacije pa tudi v tem primeru zapišimo v pregledni obliki kot:

	H_B	H_C	H_D	H_E
H_B	1,00			
H_C	0,39	1,00		
H_D	0,20	0,52	1,00	
H_E	0,00	0,00	0,00	1,00

1.9 Primer 5 – ravninska geodetska mreža (1)

Podane imamo koordinate dveh danih točk, in sicer $A(y_A, x_A) = (10{,}0\,\mathrm{m}, 10{,}0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100{,}0\,\mathrm{m}, 20{,}0\,\mathrm{m})$. Da bi določili koordinate točke $T(y_T, x_T)$, smo na točki A izmerili smerni kot $\nu_A^T = 30°57'$ in dolžino $d_{AT} = 58{,}3\,\mathrm{m}$, na točki T pa bazni vektor $\mathbf{r}_{TB} = (\Delta y_T^B, \Delta x_T^B) = (60{,}0\,\mathrm{m}, -40{,}0\,\mathrm{m})$ proti točki B. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno in pogojno izravnavo izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$. Rešite tudi stohastični model izravnave in določite natančnost ocenjenih koordinat točke T.



Slika 1–6: Izmerjen bazni vektor, dolžina in smerni kot za določitev koordinat nove točke

Posredna izravnava tega primera je detajlno prikazana v poglavju *Posredna izravnava po metodi najmanjših kvadratov* lanskega leta, in sicer v *Primer 8 - Ravninska geodetska mreža*, ko smo obravnavali posredno izravnavo.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Vidimo, da imamo $n = 4$ opazovanj, kjer želimo določiti koordinati y_T in x_T točke T, torej $n_0 = 2$. Uvedemo $u = 2$ neznanki, seveda, kar iskani količini, to sta koordinati $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T & x_T \end{bmatrix}^\mathrm{T}$. Sestavimo enačbe popravkov, ki povezujejo (izravnana) opazovanja in neznanke:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{d}_{AT} - \sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{\nu}_A^T - \arctan\left(\frac{y_T - y_A}{x_T - x_A}\right) = 0 \\ F_3 &\equiv \Delta\hat{y}_T^B - y_B + y_T = 0 \\ F_4 &\equiv \Delta\hat{x}_T^B - x_B + x_T = 0 \end{aligned} \tag{1–93}$$

   Enačbe (1–93) zapišemo v osnovni matrični obliki posredne izravnave, vendar moramo prvo nastaviti približne vrednosti neznank:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_B - \Delta y_T^B \\ x_B - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40{,}0\,\mathrm{m} \\ 60{,}0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–94}$$

   Linearizirane enačbe popravkov iz enačbe (1–93), ob upoštevanju približnih vrednosti neznank iz enačbe (1–94), so oblike $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$ in so enake:

$$\begin{bmatrix} v_{d_{AT}} \\ v_{\nu_A^T} \\ v_{\Delta y_T^B} \\ v_{\Delta x_T^B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}51 & -0{,}86 \\ -0{,}01 & 0{,}01 \\ 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_T \\ \delta x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}010\,\mathrm{m} \\ 0{,}00024 \\ 0{,}000\,\mathrm{m} \\ 0{,}000\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–95}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato sta matrika uteži $\mathbf{P}$ in matrika kofaktorjev $\mathbf{Q}$ enotski matriki $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{n\times n}$.

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave predstavljajo trije vektorji:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} -0{,}0025\,\mathrm{m} \\ -0{,}0041\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}0048\,\mathrm{m} \\ 0{,}0002400 \\ 0{,}0025\,\mathrm{m} \\ 0{,}0041\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 58{,}3048\,\mathrm{m} \\ 0{,}5404194 \\ 60{,}0025\,\mathrm{m} \\ -39{,}9959\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–96}$$

   V enačbi (1–96) sta popravek $v_{\nu_A^T}$ in izravnana vrednost $\hat{\nu}_A^T$ podana v radianih. Zapišemo ju lahko tudi $v_{\nu_A^T} = 50''$ in $\hat{\alpha} = 30°57'50''$.

   Če približni vrednostim neznank iz enačbe (1–94) prištejemo njihove popravke iz vektorja $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–96), dobimo izravnane koordinate točke T, in sicer:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} y_{T,0} + \delta y_T \\ x_{T,0} + \delta x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39{,}9975\,\mathrm{m} \\ 59{,}9959\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–97}$$

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun vseh treh matrik kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$. Ker nas v nalogi zanimajo le natančnosti koordinat točke T, zapišimo rešitev stohastičnega modela le za neznanki:

$$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}8674 & -0{,}2205 \\ -0{,}2205 & 0{,}6323 \end{bmatrix} \tag{1–98}$$

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^\mathrm{T}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 2{,}268 \times 10^{-5} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0{,}0048 \end{aligned} \tag{1–99}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane varianČno-kovariančne matrike.
   Ker imamo na voljo le referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ iz enačbe (1–99), z njo izračunamo vse iskane kovariančne matrike ($\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$), in tudi tu bomo prikazali le kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$. Le-ta ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} 1{,}967 \times 10^{-5} & -5{,}000 \times 10^{-6} \\ -5{,}000 \times 10^{-6} & 1{,}434 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \tag{1–100}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Da dobimo natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} izračunanih koordinat točke T, korenimo diagonalna elementa kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$ iz enačbe (1–100), korelacijo $\rho_{y_T x_T}$ pa dobimo iz izven-diagonalnega elementa matrike:

$$\sigma_{y_T} = 4{,}44\,\mathrm{mm} \quad \sigma_{x_T} = 3{,}79\,\mathrm{mm} \quad \rho_{y_T x_T} = -0{,}30 \tag{1–101}$$

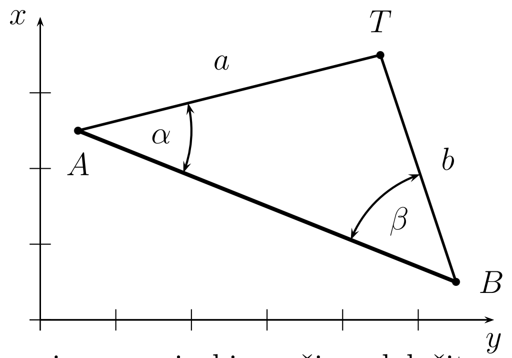
Kako bi nalogo lahko rešili s pogojno izravnavo? Sestaviti moramo $r = 2$ pogojnih enačb. S slike 1–6 lahko preko geometrije naloge ugotovimo, da morata veljati:

$$\begin{aligned} y_B - y_A &= \hat{d}_{AT} \sin \hat{\nu}_A^T + \Delta\hat{y} \\ x_B - x_A &= \hat{d}_{AT} \cos \hat{\nu}_A^T + \Delta\hat{x} \end{aligned} \tag{1–102}$$

Enačbi (1–102) predstavljata osnovo za sestavo pogojnih enačb pogojne izravnave po MNK.

1.10 Primer 6 – ravninska geodetska mreža (2)

V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A; x_A) = (5{,}0\,\mathrm{m}; 10{,}0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B; x_B) = (20{,}0\,\mathrm{m}; 0{,}0\,\mathrm{m})$. Da bi določili položaj točke T, smo s točke A opazovali dolžino $a = 16{,}2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0{,}1\,\mathrm{m}$) in kot $\alpha = 45^\circ$ ($\sigma_\alpha = 30'$), s točke B pa dolžino $b = 13{,}2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_b = 0{,}1\,\mathrm{m}$) in kot $\beta = 60^\circ$ ($\sigma_\beta = 30'$), kot to prikazuje slika 1–7. S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj koordinate točke $T(y_T, x_T)$, natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Uporabite referenčno varianco a-priori σ_0^2.



Slika 1–7: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja nove točke

Pogojna izravnava tega primera je detajlno prikazana v poglavju *Pogojna izravnava po metodi najmanjših kvadratov* lanskega leta, in sicer v *Primer 9 - Ravninska geodetska mreža (2)*, ko smo obravnavali pogojno izravnavo.

1. Nastavimo funkcionalni model izravnave – sestavimo osnovni matrični model izravnave.
   Da bi določili koordinate točke T smo izmerili $n = 4$ opazovanj, kjer bi nujno potrebovali le $n_0 = 2$ opazovanj. Ker imamo $r = 2$ nadštevilnih opazovanj, sestavimo toliko pogojnih enačb. Primer pogojnih enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}\sin\hat{\alpha} - \hat{b}\sin\hat{\beta} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\hat{\alpha}+\hat{\beta}) - D^2 = 0 \end{aligned} \tag{1–103}$$

   V drugi pogojni enačbi iz enačbe (1–103) količina D predstavlja dolžino med danima točkama A in B. Če nastavimo vektor opazovanj kot $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a & \alpha & b & \beta \end{bmatrix}^\mathrm{T}$, potem pogojni enačbi (1–103) lahko zapišemo v osnovni matrični obliki pogojne izravnave $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$:

$$\begin{bmatrix} 0{,}707 & 11{,}455 & -0{,}866 & -6{,}600 \\ 25{,}567 & -413{,}107 & 18{,}014 & -413{,}107 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_\alpha \\ v_b \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}024\,\mathrm{m} \\ -0{,}988\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–104}$$

2. Nastavimo stohastični model izravnave.
   Opazovanja so različne natančnosti in medseboj nekorelirana. Sestavimo kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$, za referenčno varianco si izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$ in dobimo kofaktorje opazovanj enake:

$$q_a = 131{,}31 \quad q_\alpha = 1{,}00 \quad q_b = 131{,}31 \quad q_\beta = 1{,}00 \tag{1–105}$$

3. Rešimo funkcionalni model izravnave.
   Rešitev funkcionalnega modela pogojne izravnave predstavljata vektorja popravkov opazovanj

in vektor izravnanih opazovanj:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0{,}0156\,\mathrm{m} \\ 0{,}0000560 \\ 0{,}0036\,\mathrm{m} \\ 0{,}0015273 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 16{,}1844\,\mathrm{m} \\ 0{,}7854542 \\ 13{,}2036\,\mathrm{m} \\ 1{,}0487249 \end{bmatrix} \tag{1–106}$$

V enačbi (1–106) sta tako popravka v_α in v_β, kot tudi izravnana kota $\hat{\alpha}$ in $\hat{\beta}$, podana v radianih. Popravka lahko zapišemo tudi kot $v_\alpha = 0'11{,}5''$, $v_\beta = 5'15{,}0''$, izravnana kota pa kot $\hat{\alpha} = 45°0'11{,}5''$ in $\hat{\beta} = 60°5'15{,}0''$.

4. Rešimo tudi stohastični model izravnave.
   Rešitev stohastičnega modela izravnave pomeni izračun obeh matrik kofaktorjev, $\mathbf{Q}_{vv}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}}$, kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 57{,}023 & 0{,}190 & -16{,}249 & -5{,}497 \\ 0{,}190 & 0{,}662 & -5{,}235 & 0{,}121 \\ -16{,}249 & -5{,}235 & 45{,}192 & 0{,}474 \\ -5{,}497 & 0{,}121 & 0{,}474 & 0{,}559 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{\hat{l}\hat{l}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{vv} &= \begin{bmatrix} 74{,}289 & -0{,}190 & 16{,}249 & 5{,}497 \\ -0{,}190 & 0{,}338 & 5{,}235 & -0{,}121 \\ 16{,}249 & 5{,}235 & 86{,}120 & -0{,}474 \\ 5{,}497 & -0{,}121 & -0{,}474 & 0{,}441 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1–107}$$

   Na osnovi pogreškov opazovanj izračunamo tudi referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 2{,}1450 \times 10^{-6} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0{,}0015 \end{aligned} \tag{1–108}$$

5. Izberemo si ustrezno referenčno varianco in izračunamo iskane varianƒno-kovariančne matrike.
   Za izračun kovariančnih matrik $\mathbf{\Sigma}_{vv}$ in $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ bomo uporabili referenčno varianco σ_0^2, kjer dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_{vv} &= \begin{bmatrix} 4{,}343 \times 10^{-3} & 1{,}450 \times 10^{-5} & -1{,}237 \times 10^{-3} & -4{,}186 \times 10^{-4} \\ 1{,}450 \times 10^{-5} & 5{,}044 \times 10^{-5} & -3{,}987 \times 10^{-4} & 9{,}229 \times 10^{-6} \\ -1{,}237 \times 10^{-3} & -3{,}987 \times 10^{-4} & 3{,}442 \times 10^{-3} & 3{,}608 \times 10^{-5} \\ -4{,}186 \times 10^{-4} & 9{,}229 \times 10^{-6} & 3{,}608 \times 10^{-5} & 4{,}259 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}} &= \begin{bmatrix} 5{,}657 \times 10^{-3} & -1{,}450 \times 10^{-5} & 1{,}237 \times 10^{-3} & 4{,}186 \times 10^{-4} \\ -1{,}450 \times 10^{-5} & 2{,}572 \times 10^{-5} & 3{,}987 \times 10^{-4} & -9{,}229 \times 10^{-6} \\ 1{,}237 \times 10^{-3} & 3{,}987 \times 10^{-4} & 6{,}558 \times 10^{-3} & -3{,}608 \times 10^{-5} \\ 4{,}186 \times 10^{-4} & -9{,}229 \times 10^{-6} & -3{,}608 \times 10^{-5} & 3{,}356 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1–109}$$

6. Iz vseh variančno-kovariančnih matrik stohastičnega modela izračunamo natančnosti neznank, popravkov opazovanj in izravnanih opazovanj ter njihove korelacije.
   Za izračun natančnosti vseh količin, korenimo diagonalne elemente vseh kovariančnih matrik iz enačbe (1–109), korelacije pa dobimo iz izven-diagonalnih elementov matrik. Ker nas primarno zanimajo izravnana opazovanja, izračunajmo natančnosti le-teh:

$$\sigma_{\hat{a}} = 7{,}5\,\mathrm{cm} \qquad \sigma_{\hat{\alpha}} = 17'26'' \qquad \sigma_{\hat{b}} = 8{,}1\,\mathrm{cm} \qquad \sigma_{\hat{\beta}} = 19'55'' \tag{1–110}$$

	$\hat{a}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{b}$	$\hat{\beta}$
$\hat{a}$	1,00			
$\hat{\alpha}$	−0,04	1,00		
$\hat{b}$	0,20	0,97	1,00	
$\hat{\beta}$	0,96	−0,31	−0,08	1,00

Korelacije med izravnanimi opazovanji izpišimo v obliki preglednice:

Rezultat pogojne izravnave v zgornjem postopku sta vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ iz enačbe (1–106) in njegova variančno-kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$ iz enačbe (1–109). Izravnana opazovanja in koordinate danih točk (A in B) uporabimo za izračun koordinat točke T, in sicer:

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + \hat{a}\sin(\nu_A^B - \hat{\alpha}) = 20{,}870\,\mathrm{m} \\ x_T &= x_A + \hat{a}\cos(\nu_A^B - \hat{\alpha}) = 13{,}175\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{1–111}$$

Natančnosti koordinat in pripadajočo korelacijo dobimo preko zakona o prenosu varianc in kovarianc. Tudi v tem primeru izhajamo iz vektorja izravnanih opazovanj $\hat{l}$ in kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\hat{l}\hat{l}}$, funkcijska povezava pa je določena v enačbi (1–111). Na koncu dobimo:

$$\sigma_{y_T} = 7{,}61\,\mathrm{cm} \quad \sigma_{x_T} = 8{,}13\,\mathrm{cm} \quad \rho_{y_T x_T} = -0{,}07 \tag{1–112}$$

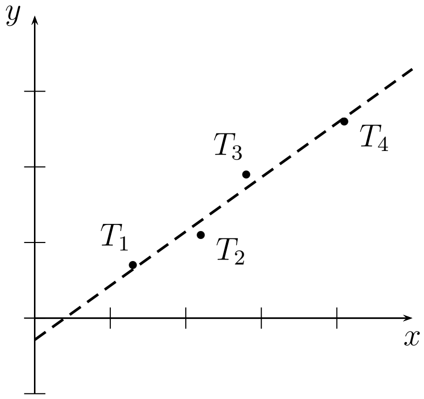
1.11 Primer 7 – premica v ravnini (opazovane vse koordinate točk)

V ravnini imamo štiri točke, za katere imamo opazovane tako koordinate x, kot tudi koordinate y, vrednosti opazovanj pa so predstavljene v preglednici 1–2.

Preglednica 1–2: Opazovane koordinate (abscise in ordinate) štirih točk

Točka	x	y
T_1	1.3	0.7
T_2	2.2	1.1
T_3	2.8	1.9
T_4	4.1	2.6

Točke v ravnini prikazuje slika 1–8. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi premico, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1–8: Točke na premici v ravnini, kjer so opazovane vse koordinate

Iz podatkov je razvidno, da je število opazovanj enako $n = 8$, opazovane imamo tako 4 koordinate x in 4 koordinate y. Za določitev minimalnega števila opazovanj, da rešimo problem, pa prvo poskusimo nastaviti enačbe popravkov. Enačbe popravkov bodo oblike:

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{x}_1 - f_{x_1}(\mathbf{x}) = 0\\
F_2 &\equiv \hat{y}_1 - f_{y_1}(\mathbf{x}) = 0\\
F_3 &\equiv \hat{x}_2 - f_{x_2}(\mathbf{x}) = 0\\
F_4 &\equiv \hat{y}_2 - f_{y_2}(\mathbf{x}) = 0\\
F_5 &\equiv \hat{x}_3 - f_{x_3}(\mathbf{x}) = 0\\
F_6 &\equiv \hat{y}_3 - f_{y_3}(\mathbf{x}) = 0\\
F_7 &\equiv \hat{x}_4 - f_{x_4}(\mathbf{x}) = 0\\
F_8 &\equiv \hat{y}_4 - f_{y_4}(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned} \tag{1–113}$$

V enačbah (1–113) vektor $\mathbf{x}$ predstavlja vektor neznank. Enačbe popravkov sestavimo tako, da prvo zapišemo niz vseh izravnanih opazovanj na začetku enačbe. Potem pa vsa izravnana opazovanja predstavimo z neznankami. Ker želimo določiti premico, ki se optimalno prilega točkam, bomo za dve neznanki izbrali parametra premice a in b. Enačbo premice, $y = a\,x + b$, bomo uporabili za opazovane koordinate y, a ker v vsaki enačbi popravkov lahko nastopa le eno opazovanje, tu ne smemo uporabiti koordinate x. Zato za vsako opazovano koordinato x nastavimo novo neznanko, kar pomeni, da moramo dodatno uvesti še štiri neznanke, ki jih označimo s p_1, p_2, p_3 in p_4. Vidimo, da je minimalno število opazovanj enako:

$$n_0 = \underbrace{2}_{a,b} + \underbrace{4}_{p_1,p_2,p_3,p_4} = 6 \tag{1–114}$$

Ko imamo uvedene neznanke, jih damo v vektor neznank, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1–115}$$

Sedaj sestavimo končne enačbe popravkov kot:

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{x}_1 - p_1 = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{y}_1 - a\,p_1 - b = 0 \\
F_3 &\equiv \hat{x}_2 - p_2 = 0 \\
F_4 &\equiv \hat{y}_2 - a\,p_2 - b = 0 \\
F_5 &\equiv \hat{x}_3 - p_3 = 0 \\
F_6 &\equiv \hat{y}_3 - a\,p_3 - b = 0 \\
F_7 &\equiv \hat{x}_4 - p_4 = 0 \\
F_8 &\equiv \hat{y}_4 - a\,p_4 - b = 0
\end{aligned} \tag{1–116}$$

Vidimo, da so enačbe opazovanj iz (1–116) sestavljene po pravilih, v vsaki enačbi nastopa le eno (izravnano) opazovanje, ki se nato zapiše v odvisnosti od (le) neznank. Enačbe opazovanj so nelinearne, zato je potrebno izračunati približne vrednosti neznank. Uporabimo opazovanja, kjer dobimo:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ p_{1,0} \\ p_{2,0} \\ p_{3,0} \\ p_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y_1 - a_0\,x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}40 \\ 0{,}20 \\ 1{,}30 \\ 2{,}20 \\ 2{,}80 \\ 4{,}10 \end{bmatrix} \tag{1–117}$$

Sestavimo osnovni matrični model posredne izravnave, $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ se nanaša na vektor opazovanj, oziroma vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ iz enačb popravkov v (1–116), medtem ko se vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ nanaša na neznanke iz enačbe (1–115), oziroma na približne vrednosti neznank iz enačbe (1–117). Sestavimo prvo matriko koeficientov $\mathbf{B}$, ki je velikosti 8×6 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \frac{\partial F_1}{\partial p_3} & \frac{\partial F_1}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \frac{\partial F_2}{\partial p_3} & \frac{\partial F_2}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial p_1} & \frac{\partial F_3}{\partial p_2} & \frac{\partial F_3}{\partial p_3} & \frac{\partial F_3}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} & \frac{\partial F_4}{\partial p_1} & \frac{\partial F_4}{\partial p_2} & \frac{\partial F_4}{\partial p_3} & \frac{\partial F_4}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_5}{\partial a} & \frac{\partial F_5}{\partial b} & \frac{\partial F_5}{\partial p_1} & \frac{\partial F_5}{\partial p_2} & \frac{\partial F_5}{\partial p_3} & \frac{\partial F_5}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_6}{\partial a} & \frac{\partial F_6}{\partial b} & \frac{\partial F_6}{\partial p_1} & \frac{\partial F_6}{\partial p_2} & \frac{\partial F_6}{\partial p_3} & \frac{\partial F_6}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_7}{\partial a} & \frac{\partial F_7}{\partial b} & \frac{\partial F_7}{\partial p_1} & \frac{\partial F_7}{\partial p_2} & \frac{\partial F_7}{\partial p_3} & \frac{\partial F_7}{\partial p_4} \\
\frac{\partial F_8}{\partial a} & \frac{\partial F_8}{\partial b} & \frac{\partial F_8}{\partial p_1} & \frac{\partial F_8}{\partial p_2} & \frac{\partial F_8}{\partial p_3} & \frac{\partial F_8}{\partial p_4}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-p_{1,0} & -1 & -a_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-p_{2,0} & -1 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-p_{3,0} & -1 & 0 & 0 & -a_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-p_{4,0} & -1 & 0 & 0 & 0 & -a_0
\end{bmatrix} \tag{1–118}$$

Nato sestavimo še vektor odstopanj $\mathbf{f}$ enačb popravkov, ki ima obliko:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_{1,0} - x_1 \\ a_0\, p_{1,0} + b_0 - y_1 \\ p_{2,0} - x_2 \\ a_0\, p_{2,0} + b_0 - y_2 \\ p_{3,0} - x_3 \\ a_0\, p_{3,0} + b_0 - y_3 \\ p_{4,0} - x_4 \\ a_0\, p_{4,0} + b_0 - y_4 \end{bmatrix} \tag{1–119}$$

Na osnovi matrike $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–118) in vektorja $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–119) sestavimo sistem normalnih enačb, in sicer tako, da izračunamo matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$ in izračunamo vektor $\mathbf{\Delta}$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \qquad \mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} \tag{1–120}$$

Numeričnih vrednosti v zgornje enačbe nismo dajali, saj je potrebno rešitev poiskati iterativno. Ko dobimo vektor $\mathbf{\Delta}$, popravimo približne vrednosti neznank iz enačbe (1–117) in ponovimo izravnavo. Postopek ponavljamo vse dokler velja:

$$||\mathbf{\Delta}|| < 1{,}00 \times 10^{-5} \tag{1–121}$$

V enačbi (1–121) operator $||\cdot||$ predstavlja normo (dolžino) vektorja. Iterativni postopek je izveden spodaj:

Iteracija # 1: $||\Delta|| = 5{,}66 \times 10^{-1}$

Iteracija # 2: $||\Delta|| = 3{,}87 \times 10^{-2}$

Iteracija # 3: $||\Delta|| = 6{,}73 \times 10^{-3}$

Iteracija # 4: $||\Delta|| = 3{,}00 \times 10^{-4}$

Iteracija # 5: $||\Delta|| = 5{,}29 \times 10^{-5}$

Iteracija # 6: $||\Delta|| = 2{,}36 \times 10^{-6}$

Po izvedenih 6-ih korakih iteracije so ocenjene neznanke enake:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}71621 \\ -0{,}28714 \\ 1{,}32654 \\ 2{,}11076 \\ 2{,}88604 \\ 4{,}07666 \end{bmatrix} \tag{1–122}$$

Vektor popravkov $\mathbf{v}$ in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ sta:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{x_3} \\ v_{y_3} \\ v_{x_4} \\ v_{y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}02654 \\ -0{,}03706 \\ -0{,}08924 \\ 0{,}12460 \\ 0{,}08604 \\ -0{,}12013 \\ -0{,}02334 \\ 0{,}03259 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}32654 \\ 0{,}66294 \\ 2{,}11076 \\ 1{,}22460 \\ 2{,}88604 \\ 1{,}77987 \\ 4{,}07666 \\ 2{,}63259 \end{bmatrix} \tag{1–123}$$

Rešimo še stohastični model izravnave, osredotočili pa se bomo na izračun referenčne variance a-priori $\hat{\sigma}_0^2$ in izračunu natančnosti neznank, torej na izračun variančno-kovariančne matrike neznank $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$. Referenčna varianca a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ in referenčni standardni odklon a-posteriori $\hat{\sigma}_0$ sta:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{n - n_0} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}}{r} = 2{,}4505 \times 10^{-2} \\ \hat{\sigma}_0 &= \sqrt{\hat{\sigma}_0^2} = 0{,}16 \end{aligned} \tag{1–124}$$

Natančnosti neznank dobimo s korenjenjem diagonalnih elementov kovariančne matrike $\mathbf{\Sigma}_{\Delta\Delta}$, dobimo jo pa tako, da uporabimo referenčno varianco a-posteriori (enačba (1–124)) in matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$ (dobimo jo preko enačbe (1–3)) . Natančnosti parametrov premice (σ_a in σ_b) in njuna korelacija (ρ_{ab}) sta:

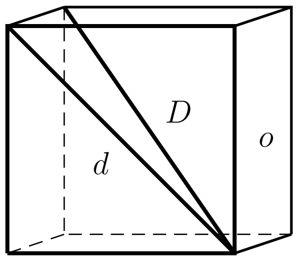
$$\sigma_a = 0{,}095 \quad \sigma_b = 0{,}265 \quad \rho_{ab} = -0{,}931 \tag{1–125}$$

Natančnosti parametrov p_1, p_2, p_3 in p_4 pa so:

$$\sigma_{p_1} = 0{,}147 \quad \sigma_{p_2} = 0{,}137 \quad \sigma_{p_3} = 0{,}136 \quad \sigma_{p_4} = 0{,}151 \tag{1–126}$$

1.12 Primeri – dodatno

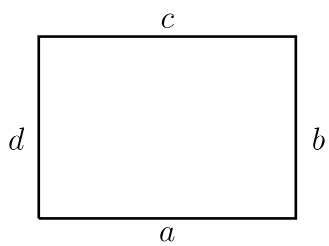
1. V kocki smo izmerili tri količine, in sicer: ploskovno diagonalo ($d = 14{,}000\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo ($D = 17{,}000\,\mathrm{m}$) in obseg osnovne ploskve ($o = 40{,}000\,\mathrm{m}$). S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja, če sta obe diagonali (d in D) korelirani, saj velja $\rho_{dD} = -0.5$. Izračunaj velikost osnovne ploskve a in njeno natančnost σ_a. Izračunaj tudi prostornino kocke V in njeno natančnost σ_V.



Slika 1–9: Naloga 1

REŠITEV: $a = 9{,}943\,\mathrm{m}$, $\sigma_a = 5{,}200\,\mathrm{cm}$, $\hat{\sigma}_0 = 0{,}265\,\mathrm{m}$, $v_d = 6{,}200\,\mathrm{cm}$, $v_D = 22{,}200\,\mathrm{cm}$, $v_o = -22{,}700\,\mathrm{cm}$, $V = 983{,}030\,\mathrm{m}^3$, $\sigma_V = 15{,}500\,\mathrm{m}^3$.

2. V pravokotniku smo izmerili vse stranice in dobili: $a = 15{,}000\,\mathrm{m}$, $b = 10{,}000\,\mathrm{m}$, $c = 14{,}900\,\mathrm{m}$ in $d = 10{,}100\,\mathrm{m}$. S posredno in pogojno izravnavo izravnajte opazovanja in določite: osnovno stranico A, površino S, njuni natančnosti σ_A in σ_S in korelacijo ρ_{AS}. Namig: za neznanki nastavite A in S.

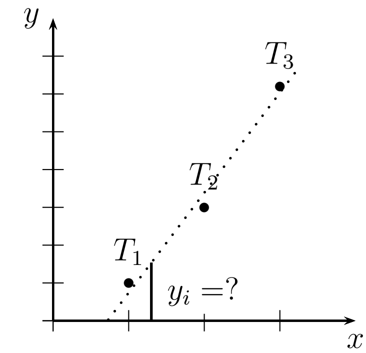


Slika 1–10: Naloga 2

REŠITEV: $A = 14{,}950\,\mathrm{m}$, $S = 150{,}250\,\mathrm{m}^2$, $\hat{a} = \hat{c} = A = 14{,}950\,\mathrm{m}$, $\hat{b} = \hat{d} = 10{,}050\,\mathrm{m}$, $\hat{\sigma}_0 = 7{,}100\,\mathrm{cm}$, $\sigma_A = 5{,}000\,\mathrm{cm}$, $\sigma_S = 0{,}900\,\mathrm{m}^2$, $\rho_{AS} = 0{,}550$.

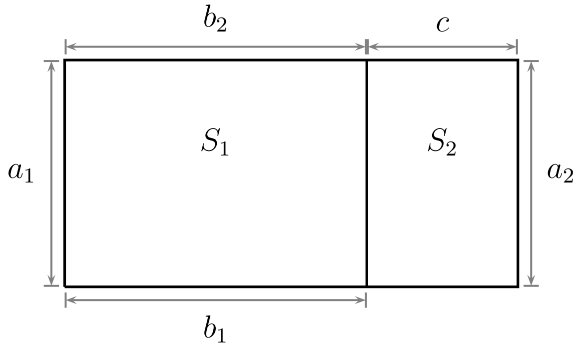
3. V ravnini smo trem točkam izmerili koordinate y (koordinate x so dane) in dobili: $T_1(x_1, y_1) = (1.0, 1.0)$, $T_2(x_2, y_2) = (2.0, 3.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (3.0, 5.1)$. Če so opazovanja enake natančnosti, s posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice (parametra a in b), ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj natančnosti parametrov premice σ_a in σ_b ter korelacijo ρ_{ab}, izračunaj tudi izravnana opazovanja, njihove natančnosti in medsebojne korelacije. Izračunaj tudi, kakšna je vrednost koordinate y_i pri vrednosti koordinate $x_i = 1.3$ in njena natančnost σ_{y_i}.

REŠITEV: $a = 2{,}050$, $b = -1{,}067$, $\sigma_a = 0{,}029$, $\sigma_b = 0{,}062$, $\rho_{ab} = -0{,}930$, $\hat{y}_1 = 0{,}983$, $\hat{y}_2 = 3{,}033$, $\hat{y}_3 = 5{,}083$, $\sigma_{\hat{y}_1} = 0{,}037$, $\sigma_{\hat{y}_2} = 0{,}024$, $\sigma_{\hat{y}_3} = 0{,}370$, $\rho_{\hat{y}_1\hat{y}_2} = 0{,}630$, $\rho_{\hat{y}_1\hat{y}_3} = -0{,}200$, $\rho_{\hat{y}_2\hat{y}_3} = 0{,}630$, $y_i = 1{,}598$, $\sigma_{y_i} = 0{,}031$.



Slika 1–11: Naloga 3

4. Parcela je sestavljena iz dveh delov, kot prikazuje slika. Da bi določili površini obeh delov (S_1 in S_2) smo izmerili 5 stranic, in sicer: $a_1 = 35{,}000\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{a_1} = 0{,}100\,\mathrm{m}$), $a_2 = 35{,}100\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{a_2} = 0{,}200\,\mathrm{m}$), $b_1 = 20{,}000\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{b_1} = 0{,}200\,\mathrm{m}$), $b_2 = 19{,}800\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{b_2} = 0{,}100\,\mathrm{m}$) in $c = 10{,}000\,\mathrm{m}$ ($\sigma_c = 0{,}100\,\mathrm{m}$). S pogojno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja, določi velikost osnovnih stranic a, b in c, njihove natančnosti in korelacije. Določi tudi določi površini S_1 in S_2, njuni natančnosti in njuno korelacijo. Za izračun vseh natančnosti uporabi referenčno varianco a-priori σ_0^2.



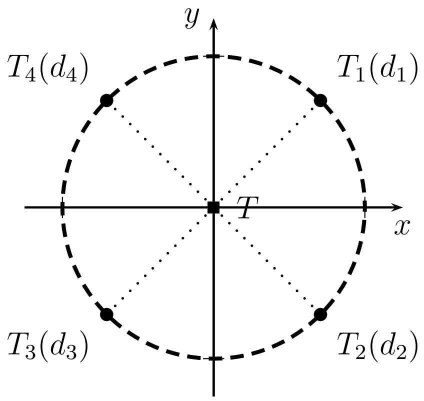
Slika 1–12: Naloga 4

REŠITEV: $a = 35{,}020\,\mathrm{m}$, $b = 19{,}840\,\mathrm{m}$, $c = 10{,}000\,\mathrm{m}$, $\sigma_a = 8{,}900\,\mathrm{cm}$, $\sigma_b = 8{,}900\,\mathrm{cm}$, $\sigma_c = 10{,}000\,\mathrm{cm}$, $\rho_{ab} = \rho_{ac} = \rho_{bc} = 0{,}000$, $S_1 = 694{,}797\,\mathrm{m}^2$, $S_2 = 350{,}200\,\mathrm{m}^2$, $\sigma_{S_1} = 3{,}600\,\mathrm{m}^2$, $\sigma_{S_1} = 3{,}610\,\mathrm{m}^2$, $\rho_{S_1S_2} = 0{,}120$

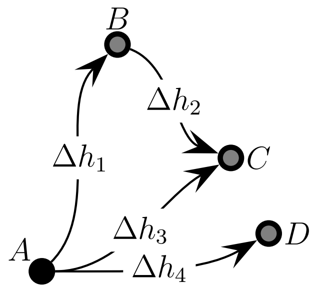
5. Imamo štiri dane točke, ki vse ležijo na enotski krožnici (glej skico): $T_1(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $T_2(x_2, y_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $T_3(x_3, y_3) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ in $T_4(x_4, y_4) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Z vsake točke smo proti novi točki $T(x_T, y_T)$, s približnimi vrednostmi koordinat $x_{T_0} = y_{T_0} = 0$, opazovali 4 dolžine (d_1, d_2, d_3, d_4) z natančnostjo $\sigma_d = 2{,}000\,\mathrm{cm}$. S posredno izravnavo po MNK določite kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_T$ točke T, natančnosti koordinat σ_{x_T}, σ_{y_T} in korelacijo $\rho_{x_Ty_T}$.

REŠITEV: $\mathbf{\Sigma}_T = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0 \\ 0 & 0.0002 \end{bmatrix}$, $\sigma_{x_T} = \sigma_{y_T} = 0.014$, $\rho_{x_Ty_T} = 0$.

6. Določiti želimo višine trem novim reperjem B, C in D s postopkom geometričnega nivelmana. Izmerili smo (glej skico): $\Delta h_1 = 1{,}332\,\mathrm{m}$, $\Delta h_3 = 1{,}785\,\mathrm{m}$, $\Delta h_2 = 0{,}450\,\mathrm{m}$ in $\Delta h_4 = -0{,}532\,\mathrm{m}$, kjer so dolžine nivelmanskih linij enake $d_1 = 100{,}000\,\mathrm{m}$, $d_3 = 100{,}000\,\mathrm{m}$, $d_2 = 50{,}000\,\mathrm{m}$ in $d_4 = 100{,}000\,\mathrm{m}$, višina danega reperja A pa je $H_A = 10{,}000\,\mathrm{m}$. S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja, določi višine vsem trem novim reperjem, njihove natančnosti in korelacije.



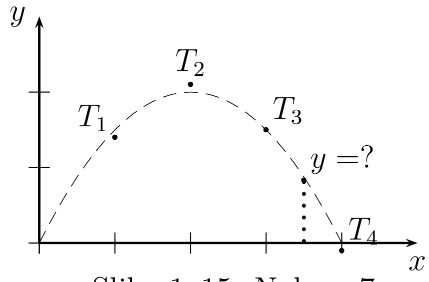
Slika 1–13: Naloga 5



Slika 1–14: Naloga 6

REŠITEV: $H_B = 11{,}333\,\mathrm{m}$, $H_C = 11{,}784\,\mathrm{m}$, $H_D = 9{,}468\,\mathrm{m}$, $\sigma_{H_B} = 1{,}470\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{H_C} = 1{,}470\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{H_D} = 1{,}900\,\mathrm{mm}$, $\rho_{H_B H_C} = 0{,}670$, $\rho_{H_B H_D} = \rho_{H_C H_D} = 0{,}000$,
$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1{,}200 & 0{,}600 & -1{,}200 & 0{,}000 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{mm}$.

7. V ravnini smo pri danih koordinatah x štirim točkam izmerili koordinate y in dobili: $T_1(1{,}000, 1{,}400)$, $T_2(2{,}000, 2{,}100)$, $T_3(3{,}000, 1{,}500)$ in $T_4(4{,}000, -0{,}100)$. S posredno izravnavo po MNK določite parametra parabole a in b tako, da gre parabola skozi izhodišče koordinatnega sistema in se optimalno prilega točkam. Izračunajte parametre parabole, njihove natančnosti in korelacije. Za koordinato $x = 3.5$ izračunajte vrednost y na paraboli in njeno natančnost σ_y.

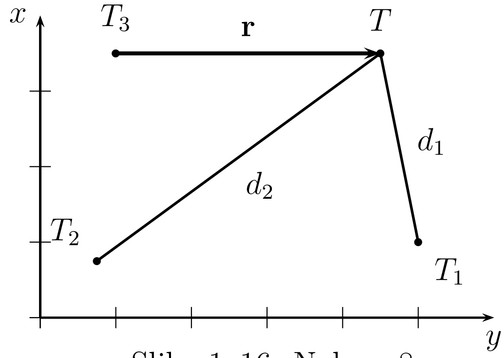


Slika 1–15: Naloga 7

REŠITEV: $a = -0{,}515$, $b = 2{,}038$, $\sigma_0^2 = 0{,}011$, $\sigma_a = 0{,}023$, $\sigma_b = 0{,}080$, $y(x = 3{,}500) = 0{,}832$, $\sigma_y = 0{,}069$.

8. Podane imamo koordinate treh točk, in sicer T_1=(80,000 m, 20,000 m), T_2=(10,000 m, 10,000 m) in T_3=(20,000 m, 80,000 m), kot prikazuje slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo opazovali dolžini $d_1 = 60{,}800\,\mathrm{m}$, $d_2 = 92{,}200\,\mathrm{m}$ ($\sigma_{d_1} = \sigma_{d_2} = 2{,}000\,\mathrm{cm}$) in vektor $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (50{,}000\,\mathrm{m}, 0{,}000\,\mathrm{m})$ ($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1{,}000\,\mathrm{cm}$, $\rho_{\Delta y \Delta x} = 0.5$). S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja, določite koordinate točke T, kovariančno matriko

$\mathbf{\Sigma}_T$ položaja točke T, natančnosti σ_{y_T} in σ_{x_T} in korelacijo $\rho_{y_T x_T}$. Za izračun natančnosti izberite referenčno varianco a-priori σ_0^2.



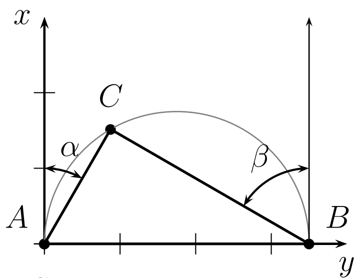
Slika 1–16: Naloga 8

REŠITEV: $y_T = 70{,}000\,\mathrm{m}$, $x_T = 79{,}997\,\mathrm{m}$, $\sigma_{y_T} = 0{,}009\,\mathrm{m}$, $\sigma_{x_T} = 0{,}008\,\mathrm{m}$, $\rho_{y_T x_T} = 0{,}370\,\mathrm{m}$.

9. V krogli smo izmerili polmer $R = 3{,}650\,\mathrm{m}$ ($\sigma_R = 3{,}000\,\mathrm{cm}$), premer $D = 7{,}100\,\mathrm{m}$ ($\sigma_D = 3{,}000\,\mathrm{cm}$), površino $A = 158{,}400\,\mathrm{m}^2$ ($\sigma_A = 0{,}120\,\mathrm{m}^2$) in prostornino $V = 187{,}500\,\mathrm{m}^3$ ($\sigma_V = 0{,}150\,\mathrm{m}^3$). Izravnajte opazovanja, pridobite njihova izravnana opazovanja, njihove natančnosti in korelacije. Natančnosti izračunajte enkrat z referenčno varianco a-priori σ_0^2, drugič pa z referenčno varianco a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$. Ali izbira variance vpliva na izračun natančnosti? Kaj pa na korelacije?.

   REŠITEV: $\hat{R} = 3{,}553\,\mathrm{m}$, $\hat{D} = 7{,}106\,\mathrm{m}$, $\hat{A} = 158{,}503\,\mathrm{m}^2$, $\hat{V} = 187{,}424\,\mathrm{m}^3$. Natančnosti z σ_0^2: $\sigma_{\hat{R}} = 0{,}700\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{D}} = 1{,}500\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{A}} = 0{,}068\,\mathrm{m}^2$, $\sigma_{\hat{V}} = 0{,}124\,\mathrm{m}^3$. Natančnosti z $\hat{\sigma}_0^2$: $\sigma_{\hat{R}} = 1{,}400\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{D}} = 2{,}900\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{A}} = 0{,}133\,\mathrm{m}^2$, $\sigma_{\hat{V}} = 0{,}242\,\mathrm{m}^3$. Korelacije: $\rho_{RD} = \rho_{RA} = \rho_{RV} = \rho_{DA} = \rho_{DV} = \rho_{AV} = 1.0$. Izbira variance vpliva na izračun natančnosti, a ne na izračun korelacij (zakaj?).

10. Z danih točk $A(y_A, x_A)$=(0,000 m, 0,000 m) in $B(y_B, x_B)$=(100,000 m, 0,000 m) smo neodvisno in z različno natančnostjo opazovali kota $\alpha = 30°1'$ ($\sigma_\alpha = 15{,}000''$) in $\beta = 60°1'$ ($\sigma_\beta = 30{,}000''$) do točke C. Točka C leži na krožnici, katere diametralni točki sta točki A in B. S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi koordinate točke C. Določi kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_C$, natančnosti koordinat σ_{y_C} in σ_{x_C} točke C ter korelacijo $\rho_{y_C x_C}$. Za izračun uporabi referenčno varianco a-priori σ_0^2.

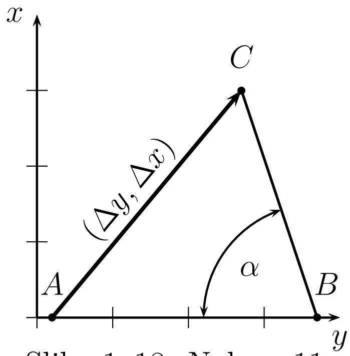


Slika 1–17: Naloga 10

   REŠITEV: $\hat{\alpha} = 30°0'36{,}000''$, $\hat{\beta} = 59°59'24{,}000''$, $\sigma_{\hat{\alpha}} = \sigma_{\hat{\beta}} = 13{,}400''$, $\rho_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -1{,}000$, $y_C = 25{,}015\,\mathrm{m}$, $x_C = 43{,}310\,\mathrm{m}$, $\sigma_{y_C} = 5{,}600\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{x_C} = 3{,}300\,\mathrm{mm}$, $\rho_{y_C x_C} = 1{,}000$.

11. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10{,}000\,\mathrm{m}, 0{,}000\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100{,}000\,\mathrm{m}, 0{,}000\,\mathrm{m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60{,}000\,\mathrm{m}, 45{,}000\,\mathrm{m})$, na točki B pa kot $\alpha = 56°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj

opazovanja in določi koordinate točke T, kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}T$, natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$.



Slika 1–18: Naloga 11

REŠITEV: $\Delta\hat{y} = 60{,}000\,\mathrm{m}$, $\Delta\hat{x} = 45{,}000\,\mathrm{m}$, $\hat{\alpha} = 56°18'44{,}400''$, $\hat{\sigma}_0^2 = 2{,}973 \times 10^{-5}$, $\sigma_{\Delta\hat{y}} = \sigma_{\Delta\hat{x}} = 5{,}500\,\mathrm{mm}$, $\sigma_{\hat{\alpha}} = 0°0'21{,}000''$, $y_C = 70{,}000\,\mathrm{m}$, $x_C = 45{,}000\,\mathrm{m}$, $\sigma_{y_C} = \sigma_{x_C} = 5{,}500\,\mathrm{mm}$, $\rho_{y_C x_C} = -1{,}600 \times 10^{-4}$.