

1 ZAKON O PRENOSU VARIANC IN KOVARIANC

Pri prenosu pravih pogreškov nas je zanimalo, kakšno napako povzročimo pri neznanki, če imamo podan pravi pogrešek opazovanja. V splošnem pravih pogreškov ne poznamo, slučajnost opazovanj pa opišemo z variančno-kovariančno matriko opazovanj Σ . Kadar poskušamo ugotoviti, kakšna je kovariančna matrika neznank Σ_{yy} , ko poznamo kovariančno matriko opazovanj (ali neodvisnih parametrov Σ_{xx}), potem govorimo o **ZAKONU O PRENOSU VARIANC IN KOVARIANC**.

1.1 Izračun variančno-kovariančne matrike neznank

V geodeziji opazujemo količine - opazovanja, ki so z neznankami, ki jih želimo izračunati, povezane posredno. Tako imamo m neznanih količin, ki jih označimo z $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$, ki so v funkcijski povezavi z n opazovanji, $x_i, i = 1, \dots, n$. Funkcijsko odvisnost zapišemo kot:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

Matrično lahko enačbo 1 zapišemo tudi kot:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

V enačbi 2 predstavlja \mathbf{x} vektor opazovanj velikosti $n \times 1$, \mathbf{y} vektor računanih neznank velikosti $m \times 1$ in \mathbf{F} (v splošnem) nelinearne funkcije iz enačb 1. Poudariti je potrebno, **da pri zakonu o prenosu varianc in kovarianc nimamo nadštevilnih meritev, oz. $r = n - n_0 = 0$.**

Ob podani kovariančni matriki opazovanj Σ_{xx} nas zanima, kakšna je kovariančna matrika neznank, oziroma kako se preko funkcij \mathbf{F} prenese natančnost opazovanj v neznanke. Rezultat je kovariančna matrika neznank Σ_{yy} , ki ima obliko:

$$\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T \quad (3)$$

Matrika \mathbf{J} v enačbi 3 predstavlja jakobijevo matriko velikosti $m \times n$, oziroma matriko vseh parcialnih odvodov, vseh neznank ($y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$) po vseh opazovanjih ($x_i, i = 1, \dots, n$). Jakobijeva matrika ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

1.2 Izračun korelacije med opazovanji in neznankami

Izračunana variančno-kovariančna matrika Σ_{yy} neznank iz enačbe 3 je kvadratna matrika, ki ima po diagonali variance neznank, izven-diagonalni elementi pa nakazujejo na morebitno korelacijo med neznankami. Enako velja tudi za variančno-kovariančno matriko opazovanj Σ_{yy} , tudi tu izven-diagonalni elementi nakazujejo na korelacijo med opazovanji. Vprašanje, ki se pojavi pa je, kako pa bi prišli do korelacije med opazovanji in neznankami?

Da lahko izračunamo korelacije med neznankami in opazovanji, moramo pridobiti tako variančno-kovariančno matriko $\Sigma_{\bar{y}y}$, ki bo vsebovala stohastične informacije tako neznank kot tudi opazovanj. Da pa jo lahko pridobimo, moramo prvo vektor neznank razširiti tako, da bo vseboval vse neznanke iz vektorja \mathbf{y} in vsa opazovanja iz vektorja \mathbf{x} . Vektor označimo z $\bar{\mathbf{y}}$ in je oblike:

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Enačba 2 nam prikazuje, kako se iz opazovanj (\mathbf{x}) izračuna neznanke (\mathbf{y}), torej lahko funkcijsko povezavo glede na obliko novega (razširjenega) vektorja neznank iz enačbe 5 zapišemo kot:

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

Na osnovi enačbe 5 izračunajmo razširjeno jakobijevo matriko $\bar{\mathbf{J}}$, ki ima obliko:

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Jakobijeva matrika $\bar{\mathbf{J}}$ iz enačbe 7 ima enako število stolpcev kot jakobijeva matrika iz enačbe 4 (število opazovanj se ni spremenilo), medtem ko ima pa več vrstic (dodali smo opazovanja med neznanke). Vidi se, da je prvi del, to so parcialni odvodi po neznankah v vektorju \mathbf{y} , ostaja enak, v drugem delu pa imamo enotsko matriko (odvodi opazovanj po samih seboj). Variančno kovariančna matrika $\Sigma_{\bar{y}y}$ ima, glede na enačbo zakona o prenosu varianc in kovarianc iz enačbe 3, obliko:

$$\Sigma_{\bar{y}y} = \bar{\mathbf{J}}\Sigma_{xx}\bar{\mathbf{J}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Sigma_{xx} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T & \mathbf{J}\Sigma_{xx} \\ \Sigma_{xx}\mathbf{J}^T & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Iz enačbe 8 vidimo, da po diagonali dobimo ravno variančno-kovariančni matriki neznank Σ_{yy} (prvi del) in opazovanj Σ_{xx} (drugi del). Izven-diagonalni matriki Σ_{yx} in Σ_{xy} pa sta

oblike:

$$\Sigma_{yx} = \Sigma_{xy}^T = \mathbf{J}\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1x_1} & \sigma_{y_1x_2} & \sigma_{y_1x_3} & \cdots & \sigma_{y_1x_n} \\ \sigma_{y_2x_1} & \sigma_{y_2x_2} & \sigma_{y_2x_3} & \cdots & \sigma_{y_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{y_mx_1} & \sigma_{y_mx_2} & \sigma_{y_mx_3} & \cdots & \sigma_{y_mx_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Matrika Σ_{yx} predstavlja izhodišče za izračun korelacij med neznankami in opazovanji. Za neznanko j in opazovanje i tako dobimo:

$$\rho_{y_jx_i} = \frac{\sigma_{y_jx_i}}{\sigma_{y_j}\sigma_{x_i}} \quad (10)$$

Kovarianco $\rho_{y_jx_i}$ dobimo iz matrike Σ_{yx} iz enačbe 9 (j -ta vrstica in i -ti stolpec), standardni odklon σ_{y_j} dobimo iz variančno-kovariančne matrike Σ_{yy} (vzamemo j -ti diagonalni element) in standardni odklon σ_{x_i} iz variančno-kovariančne matrike Σ_{xx} (vzamemo i -ti diagonalni element), ki pa predstavlja podatek naloge.

1.3 Postopek izvedbe zakona o prenosu varianc in kovarianc

Pri prenosu varianc in kovarianc tako postopamo v naslednjem vrstnem redu:

1. Pridobimo opazovanja x_i ($i = 1, \dots, n$) in informacijo o natančnosti opazovanj; standardne odklone opazovanj σ_i ($i = 1, \dots, n$) in morebitne korelacije med opazovanji ρ_{ij} ($i, j = 1, \dots, n \wedge i \neq j$). Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .
2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank \mathbf{y} .
3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank \mathbf{y} .
4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.
5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.
6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami ρ_{ij} ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).
7. Če naloga zahteva, iz variančno-kovariančne matrike Σ_{yx} izračunamo tudi korelacije med neznankami in opazovanji $\rho_{y_jx_i}$ ($j = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n$).

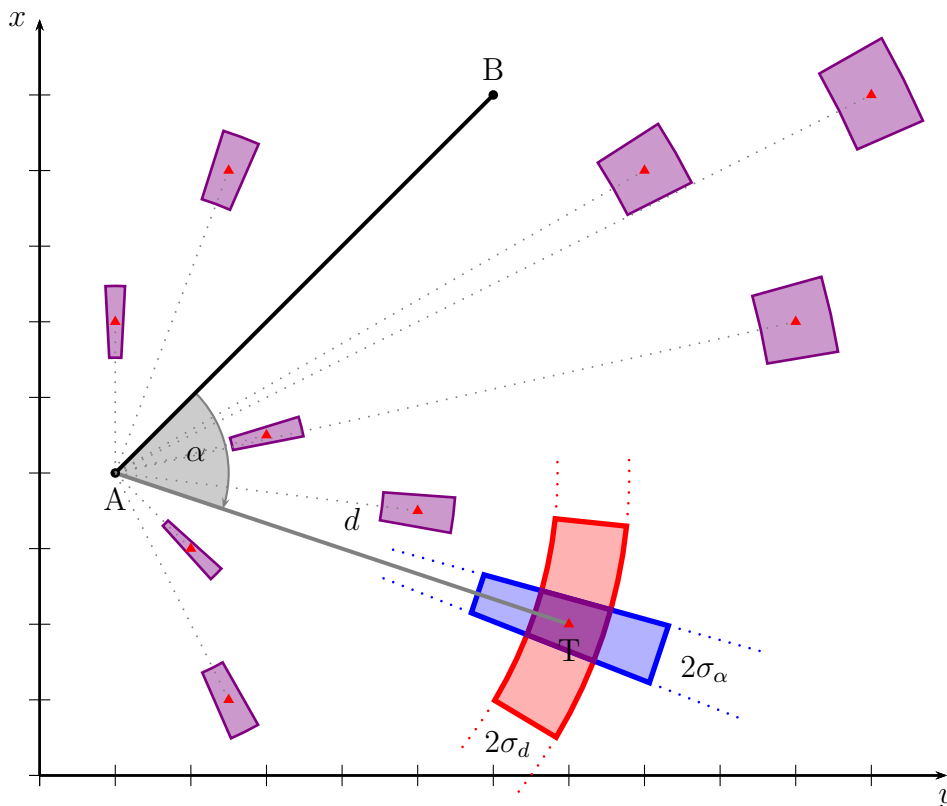
1.4 Geometrijski prikaz Zakona o prenosu varianc in kovarianc

Predstavimo si geometrijsko ozadje zakona o prenosu varianc in kovarianc na primerih določitve koordinat novih točk v ravnini. Prikazali bomo štiri metode izmere, to so polarna izmera, zunanji urez, ločni presek in izmera GNSS. V vseh primerih imamo na voljo dve opazovanji, s katerima izračunamo koordinate nove točke. Pri terestričnih metodah določitve koordinat (polarna izmera, zunanji urez in ločni presek) izhajamo iz dveh danih točk, medtem ko pri izmeri GNSS izhajamo iz ene same dane točke.

V spodnjih primerih bomo prikazali, kako lahko geometrijsko prikažemo natančnost izmerjenih opazovanj in kako se le-ta odraža pri izračunu koordinat. Koordinate načeloma izračunamo preko različnih matematičnih formul, geometrijsko pa jih dobimo s preseki premic in/ali krožnic.

1.4.1 Geometrijski prikaz – Polarna izmera

Pri polarni izmeri merimo polarni kot (α) in dolžino (d). Obe opazovanji izmerimo na eni dani točki (A), kjer nam izhodiščno smer (orientacijo) podaja smer proti drugi dani točki (B). Dolžina je izmerjena z natančnostjo σ_d , medtem ko je kot izmerjen z natančnostjo σ_α . Situacijo polarne izmere prikazuje slika 1. Detajlen prikaz geometrije je pri točki, kjer je oznaka T prisotna. Ostale lokacije prikazujejo vpliva natančnosti opazovanj in geometrije na kakovost določenega položaja točke T pri polarni izmeri.



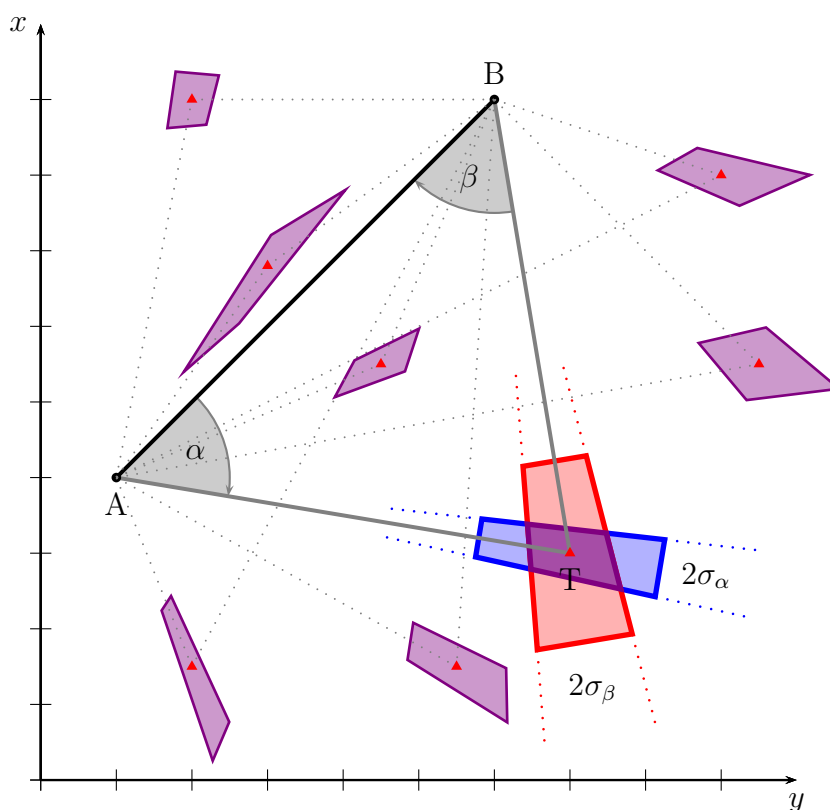
Slika 1: Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri polarni izmeri

Geometrijsko je položaj nove točke T določen s presečiščem krožnice in premice. Krožnico

realizira izmerjena dolžina d , premico pa krak kota α , od stojiščne točke A proti novi točki T . Geometrijski prikaz natančnosti opazovanj lahko vidimo iz slike. Natančnost izmerjenega kota nam pove, da je pravi položaj točke T lahko malo levo ali malo desno glede na zveznico \overline{AT} , širina območja je podana s standardnim odklonom. Na sliki je to predstavljeno z modrimi pravokotniki. Natančnost izmerjene dolžine pa nam pove, da je pravi položaj točke T lahko malo bližje ali malo bolj stran, glede na točko A . Na sliki je to predstavljeno z rdečimi deli kolobarja. Kombinacija obeh opazovanj pa so vijolični "pravokotniki"¹, ki predstavljajo območje, kjer se zelo verjetno nahaja prava točka T .

Slika 1 prikazuje številne različne lege točke T , ki se medseboj razlikujejo po tem, da imajo različno orientacijo (smerni kot) in različno oddaljenost, glede na točko A , pri tem, da sta vse kombinacije natančnosti opazovanj enaki. Pri teh položajih točke T prikazujemo samo še vijolične pravokotnike. Iz slike lahko vidimo, da enaka natančnost izmerjene dolžine poda vedno enako dimenzijo vijoličnega pravokotnika v smeri izmerjene dolžine, neodvisno od položaja točke T . Po drugi strani, pa natančnost izmerjenega kota poda različne širine vijoličnih pravokotnikov, prečno na smer \overline{AT} , če se od točke A oddaljujemo. Natančnost položaja točke T je pri polarni izmeri odvisna od oddaljenosti od točke A in neodvisna od smeri orientacije (položaja točke B). Položaj točke T je določen bolj kakovostni, če je bližje točki A in če sta obe opazovanji izmerjeni kakovostno.

1.4.2 Geometrijski prikaz – Zunanji urez



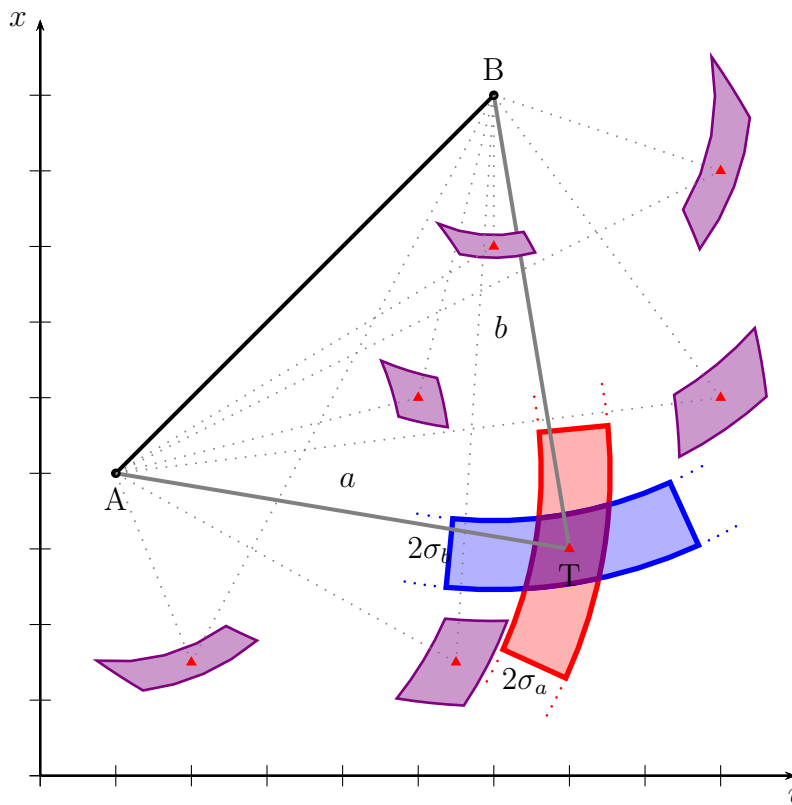
Slika 2: Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri zunanjem urezu

¹pri poglavju Elipse pogreškov bomo videli, da pravi položaj točke leži nekje znotraj elipse

Podobno, kot pri polarni izmeri, lahko geometrijsko prikažemo tudi zunanji urez, kar prikazujemo na sliki 2. Pri zunanjem urezu izmerimo dva kota, α in β , prvega na točki A (med B in T) in drugega na točki B (med A in T). Položaj točke T je določen s presečiščem dveh premic, ki ju definirata oba kota. Natančnosti obeh kotov sta podani s pravokotniki, kjer z modrimi prikazujemo natančnost kota α , z rdečimi pa natančnost kota β . Območje, kjer se verjetno nahaja pravi položaj točke je spet prikazan s preseki obeh pravokotnikov in so prikazani v vijoličnem.

Na sliki 2 so prikazani različni položaji točke T , pri tem, da sta natančnosti izmerjenih kotov isti za vse položaje. Iz slike je razvidno, da na velikost in obliko vijoličnega območja vpliva predvsem geometrija točk A , B in T , ki določajo kot, pod katerim se sekata obe premici kotov α in β . Tu lahko ovrednotimo izraz "slabi in dobri preseki", ki se nanašajo na velikost in obliko vijoličnega območja v odvisnosti od kota, pod katerim se sekata obe premici. Dober presek je takrat, ko je vijolično območje blizu kvadrata in majhno. Slab presek je takrat, ko je vijolično območje zelo veliko ali zelo raztegnjen pravokotnik. Vidimo, da so vijolični pravokotniki manjši, če se bosta obe premici sekali pod pravim kotom. V praksi se zato izogibamo situacij z majhnim kotom presekov.

1.4.3 Geometrijski prikaz – Ločni presek



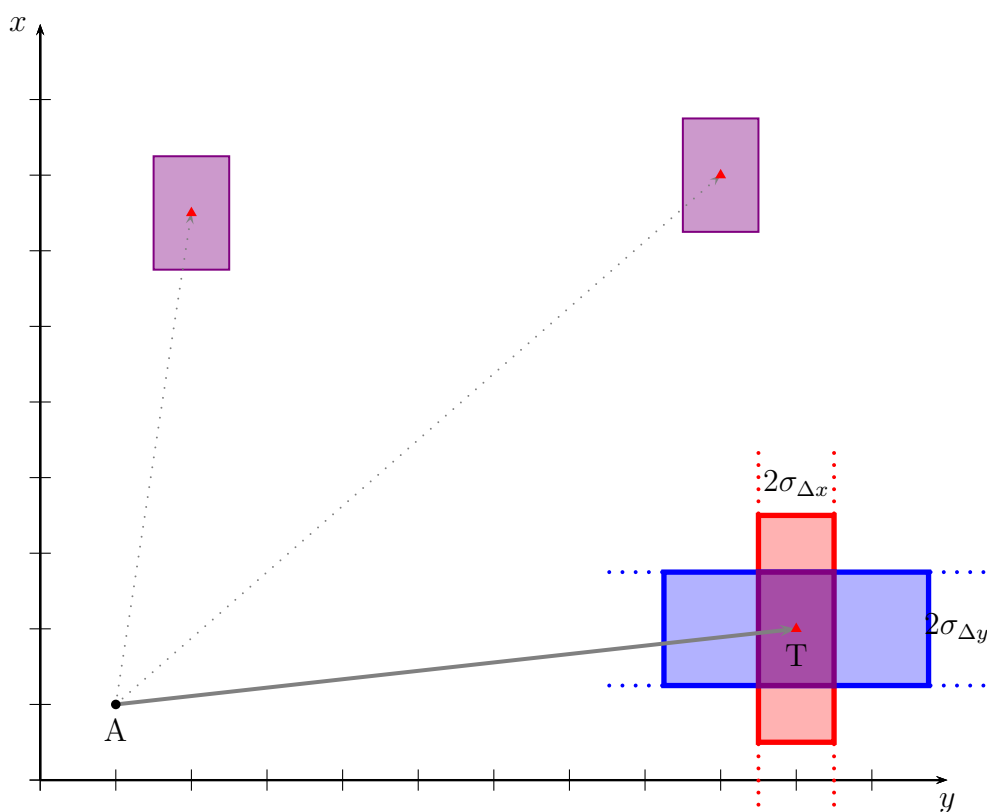
Slika 3: Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri ločnem preseku

Pri ločnem preseku položaj točke T določimo z dvema izmerjenima dolžinama, a in b , geometrijsko pa je položaj določen s presekom dveh krožnic. Na sliki 3 različne situacije. Če predpostavimo, da je natančnost obeh dolžin enaka in neodvisna od velikosti dolžine,

potem je natančnost položaja točke T odvisna zgolj od geometrije točk A , B in T . Tudi tu težimo k tem, da se obe krožnici sekata pod kotom, ki je bližje pravemu kotu. Položaj točke T pri zelo majhnem presečnem kotu je slabše kakovosti.

1.4.4 Geometrijski prikaz – Izmera GNSS

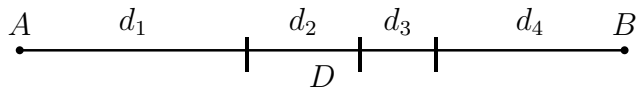
Geometrijski prikaz zakona o prenosu varianc in kovarianc pri izmeri GNSS pa prikazuje slika 4. Položaj točke T je določen tako, da med točko A (dana točka) in točko T opazujemo bazni vektor, ki ga v ravnini predstavljata komponenti Δy in Δx . Položaj točke T je presek dveh premic, ki sta med seboj vedno pravokotni, saj je ena vzporedna osi y , druga pa x . Iz slike vidimo, da na kakovost položaja točke T vpliva samo kakovost izmerjenega baznega vektorja, medtem ko geometrija ne igra nobene vloge. Izmera GNSS je z geometričnega stališča tudi zelo preprosta, kar se izkaže tudi pri izravnavi baznih vektorjev.



Slika 4: Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri izmeri GNSS

1.5 Primer naloge – Izračun natančnosti izmerjene dolžine

Dolžino D med točkama A in B ne moremo izmeriti neposredno, zato smo jo izmerili v štirih delih, kot to prikazuje slika 5.



Slika 5: Prikaz izmere dolžine D med točkama A in B

Opazovane dolžine d_i , s pripadajočimi natančnostmi σ_i $i = 1, \dots, 4$, so podane kot:

$$\begin{aligned} d_1 &= 461.825 \text{ m} & \sigma_1 &= 0.021 \text{ m} \\ d_2 &= 215.623 \text{ m} & \sigma_2 &= 0.017 \text{ m} \\ d_3 &= 117.221 \text{ m} & \sigma_3 &= 0.010 \text{ m} \\ d_4 &= 512.338 \text{ m} & \sigma_4 &= 0.025 \text{ m} \end{aligned}$$

Izračunaj dolžino D in njeno natančnost σ_D , in sicer:

- če uporabiš podatke iz navodil,
- če predpostaviš, da sta opazovanji d_1 in d_2 korelirani (podan je ρ_{12}). Kdaj bo končna natančnost višja, če je korelacijski koeficient ρ_{12} pozitiven, ali negativen?

Izračunajte tudi korelacijo med neznanko D in opazovanjem d_4 ?

Da izračunamo rešitev naloge, postopamo po korakih iz poglavja 1.3.

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} . Iz naloge je razvidno, da imamo $n = 4$ opazovanja, ki jih vstavimo v vektor opazovanj \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461.825 \text{ m} \\ 215.623 \text{ m} \\ 117.221 \text{ m} \\ 512.338 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Sestavimo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} . Ker imamo podane samo natančnosti opazovanj, je matrika diagonalna in ima obliko:

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4.41 \times 10^{-4} \text{ m}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.89 \times 10^{-4} \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.00 \times 10^{-4} \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.25 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank \mathbf{y} .
Iz podatkov naloge vidimo, da nas zanima dolžina D , število neznank je torej $m = 1$.
Vektor neznank \mathbf{y} je velikosti $m \times 1 = 1 \times 1$ in ima obliko:

$$\mathbf{y} = [D] \quad (13)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank \mathbf{y} .
Iz skice velja:

$$D = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1307.007 \text{ m} \quad (14)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.
Ker je funkcijska povezava med opazovanji in neznankami iz enačbe 14 enostavna, zapišimo samo jakobijevo matriko \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial d_1} & \frac{\partial D}{\partial d_2} & \frac{\partial D}{\partial d_3} & \frac{\partial D}{\partial d_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.
Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} (enačba 12) in jakobijevo matriko \mathbf{J} (enačba 15), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank Σ_{yy} :

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy} &= \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \sigma_D^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial d_1} & \frac{\partial D}{\partial d_2} & \frac{\partial D}{\partial d_3} & \frac{\partial D}{\partial d_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial d_1} \\ \frac{\partial D}{\partial d_2} \\ \frac{\partial D}{\partial d_3} \\ \frac{\partial D}{\partial d_4} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial D}{\partial d_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial d_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial d_3}\right)^2 \sigma_3^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial d_4}\right)^2 \sigma_4^2 \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 = 1.455 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Oblika rešitve iz enačbe 16 izhaja neposredno iz matričnega izračuna. Lahko vidimo, da je produkt $\mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$ v tem primeru identičen kot produkt $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$ pri metodi najmanjših kvadratov, torej veljajo tu enaka pravila.

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).
Ker imamo eno samo neznanke, smo v enačbi 16 dobili varianco neznanke σ_D^2 . Če jo korenimo, dobimo natančnost iskane dolžine σ_D , ki je:

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_D^2} = 0.038 \text{ m} \quad (17)$$

1.5.1 Vpliv korelacije med opazovanji

Prikažimo v nadaljevanju vpliv korelacije ρ_{12} med opazovanjema d_1 in d_2 . Kar se spremeni, glede na postopek zgoraj, je oblika kovariančne matrice opazovanj. Prvo moramo izračunati kovarianco $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$. Kovariančna matrika opazovanj Σ_{xx} ima tako obliko:

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Če uporabimo kovariančno matriko Σ_{xx} iz enačbe 18 za izračun kovariančne matrice neznank Σ_{yy} iz enačbe 16 bomo dobili:

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy} &= \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = \left[\sigma_D^2 \right] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial d_1} & \frac{\partial D}{\partial d_2} & \frac{\partial D}{\partial d_3} & \frac{\partial D}{\partial d_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial d_1} \\ \frac{\partial D}{\partial d_2} \\ \frac{\partial D}{\partial d_3} \\ \frac{\partial D}{\partial d_4} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial D}{\partial d_1} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial d_2} \right)^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial d_3} \right)^2 \sigma_3^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial d_4} \right)^2 \sigma_4^2 + 2 \frac{\partial D}{\partial d_1} \frac{\partial D}{\partial d_2} \sigma_{12} \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + 2\sigma_{12} \end{aligned} \quad (19)$$

Sedaj lahko iz enačbe 19 vidimo, kako vpliva korelacija med d_1 in d_2 na izračunano natančnost dolžine D . Gledamo predznak izraza $2 \frac{\partial D}{\partial d_1} \frac{\partial D}{\partial d_2} \sigma_{12}$ in lahko ugotovimo:

- če je izraz negativen, s tem izboljšamo natančnost dolžine D ,
- če pa je izraz pozitiven, s tem poslabšamo natančnost dolžine D .

Izračunajmo natančnost σ_D če je $\rho_{12} = -0.75$ in če je $\rho_{12} = 0.75$. Dobimo:

- korelacija je negativna $\rightarrow \rho_{12} = -0.75$:

$$\sigma_D = 0.030 \text{ m} \quad (20)$$

- korelacija je pozitivna $\rightarrow \rho_{12} = 0.75$:

$$\sigma_D = 0.045 \text{ m} \quad (21)$$

1.5.2 Izračun korelacije med neznanko in opazovanjem

Korelacijo med dvema količinama lahko izračunamo le v primeru, ko obe količini nastopata v istem vektorju in imata informacije o natančnosti podane v isti kovariančni matriki, kot je to prikazano v poglavju 1.2. Ker želimo izračunati korelacijo

med dolžino D in opazovanjem d_4 , bomo vektor neznank nastavili kot:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} D \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Variančno-kovariančna matrika vektorja neznank iz enačbe 22 bo oblike:

$$\Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & \sigma_{Dd_4} \\ \sigma_{Dd_4} & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Iz enačbe 23 vidimo, da je izvendiagonalni element kovariančne matrike ravno kovarianca σ_{Dd_4} , iz katere bomo izračunali korelacijo ρ_{Dd_4} . Prvo zapišimo funkcijsko zvezo med vektorjem neznank \mathbf{y} in vektorjem opazovanj \mathbf{x} :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} D \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1307.007 \text{ m} \\ 512.338 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Jakobijeva matrika \mathbf{J} ima sedaj dve vrstici, saj imamo dve neznanki, torej ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial d_1} & \frac{\partial D}{\partial d_2} & \frac{\partial D}{\partial d_3} & \frac{\partial D}{\partial d_4} \\ \frac{\partial d_4}{\partial d_1} & \frac{\partial d_4}{\partial d_2} & \frac{\partial d_4}{\partial d_3} & \frac{\partial d_4}{\partial d_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Uporabimo zakon o prenosu varianc in kovarianc, kjer za kovariančno matriko uporabimo matriko iz enačbe 12, kjer ni korelacij med opazovanji. Uporabimo enačbo 3 in dobimo:

$$\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & \sigma_{Dd_4} \\ \sigma_{Dd_4} & \sigma_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 & \sigma_4^2 \\ \sigma_4^2 & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Iz enačbe 26 vidimo, da velja:

- Varianca dožine D je enaka $\sigma_D^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 = 1.455 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, rezultat isti kot v enačbi 16.
- Varianca dolžine d_4 je enaka $\sigma_4^2 = \sigma_4^2 = 6.250 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, rezultat isti, kot je podan v podatkih naloge.
- Kovarianca med dolžinama D in d_4 je enaka $\sigma_{Dd_4} = \sigma_4^2 = 6.250 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Iz tega sledi, da je korelacija ρ_{Dd_4} enaka:

$$\rho_{Dd_4} = \frac{\sigma_{Dd_4}}{\sigma_D\sigma_4} = \frac{\sigma_4^2}{\sigma_D\sigma_4} = \frac{\sigma_4}{\sigma_D} = 0.66 \quad (27)$$

Korelacije med neznanko D in vsemi opazovanji pridobimo na isti način kot za opazovanje d_4 , v splošnem pa izhajamo iz enačb iz poglavja 1.2. Na koncu dobimo:

$$\rho_{Dd_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_D} = 0.55 \quad (28)$$

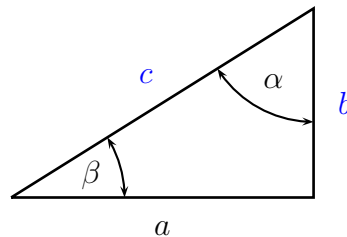
$$\rho_{Dd_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_D} = 0.45 \quad (29)$$

$$\rho_{Dd_3} = \frac{\sigma_3}{\sigma_D} = 0.26 \quad (30)$$

$$\rho_{Dd_4} = \frac{\sigma_4}{\sigma_D} = 0.66 \quad (31)$$

1.6 Primer naloge – Pravokotni trikotnik

V pravokotnem trikotniku smo izmerili dve stranici, in sicer hipotenuzo c in kateto b , kot to prikazuje slika 6.



Slika 6: Prikaz opazovanj in neznank v pravokotnem trikotniku

Opazovanji imata vrednosti: $c = 416.050$ m, z natančnostjo $\sigma_c = 0.020$ m, in $b = 202.118$ m, z natančnostjo $\sigma_b = 0.012$ m. Izračunaj kateto a in oba notranja kota α in β . Izračunaj tudi njihove natančnosti σ_a , σ_α in σ_β ter vse korelacije $\rho_{a\alpha}$, $\rho_{a\beta}$ in $\rho_{\alpha\beta}$.

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} . Iz naloge je razvidno, da imamo $n = 2$ opazovanji, in sicer hipotenuzo c in kateto b . Vektor opazovanj \mathbf{x} je oblike:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 416.050 \text{ m} \\ 202.118 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Sestavimo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} . Ker imamo podane samo natančnosti opazovanj, je matrika diagonalna in ima obliko:

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_c^2 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.00 \times 10^{-4} \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 1.44 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank \mathbf{y} . Pri podanih dveh opazovanih stranicah trikotnika, nas zanima kateta a in oba notranja kota α in β , torej $m = 3$. Vektor neznank \mathbf{y} je velikosti $m \times 1 = 3 \times 1$ in ima obliko:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (34)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank \mathbf{y} . Izračun neznank sledi osnovnim enačbam pravokotnega trikotnika. Dobimo:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c^2 - b^2} = 363.656 \text{ m} \\ \alpha &= \arcsin \frac{b}{c} = 29^\circ 3' 54.2'' \\ \beta &= \arccos \frac{b}{c} = 60^\circ 56' 5.8'' \end{aligned} \quad (35)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Izračunati moramo vseh 3×2 parcialnih odvodov. Oblike parcialnih odvodov so enake:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial c} &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - b^2}} = \frac{c}{a} & \frac{\partial a}{\partial b} &= \frac{-b}{\sqrt{c^2 - b^2}} = \frac{-b}{a} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial c} &= \frac{-b}{c\sqrt{c^2 - b^2}} = \frac{-b}{ca} & \frac{\partial \alpha}{\partial b} &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - b^2}} = \frac{1}{a} \\ \frac{\partial \beta}{\partial c} &= \frac{b}{c\sqrt{c^2 - b^2}} = \frac{b}{ca} & \frac{\partial \beta}{\partial b} &= \frac{-1}{\sqrt{c^2 - b^2}} = \frac{-1}{a} \end{aligned} \quad (36)$$

Jakobijeva matrika \mathbf{J} je enaka:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial c} & \frac{\partial a}{\partial b} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial c} & \frac{\partial \alpha}{\partial b} \\ \frac{\partial \beta}{\partial c} & \frac{\partial \beta}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.144\,07 & -5.557\,94 \times 10^{-1} \\ -1.335\,88 \times 10^{-3} & 2.749\,85 \times 10^{-3} \\ 1.335\,88 \times 10^{-3} & -2.749\,85 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (37)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} (enačba 33) in jakobijevo matriko \mathbf{J} (enačba 37), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank Σ_{yy} :

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy} &= \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{a\alpha} & \sigma_{a\beta} \\ \sigma_{a\alpha} & \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{a\beta} & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5.6805 \times 10^{-4} & -8.3142 \times 10^{-7} & 8.3142 \times 10^{-7} \\ -8.3142 \times 10^{-7} & 1.8030 \times 10^{-9} & -1.8030 \times 10^{-9} \\ 8.3142 \times 10^{-7} & -1.8030 \times 10^{-9} & 1.8030 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Iz diagonale kovariančne matrike neznank Σ_{yy} iz enačbe 38 izračunamo natančnosti neznank, standardne odklone. Varianca σ_a^2 je podana v metrih, medtem ko sta varianci σ_α^2 in σ_β^2 podani v radianih. Če variance korenimo in predstavimo v ustreznih enotah, dobimo:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 0.024\text{ m} \\ \sigma_\alpha &= 8.8'' \\ \sigma_\beta &= 8.8'' \end{aligned} \quad (39)$$

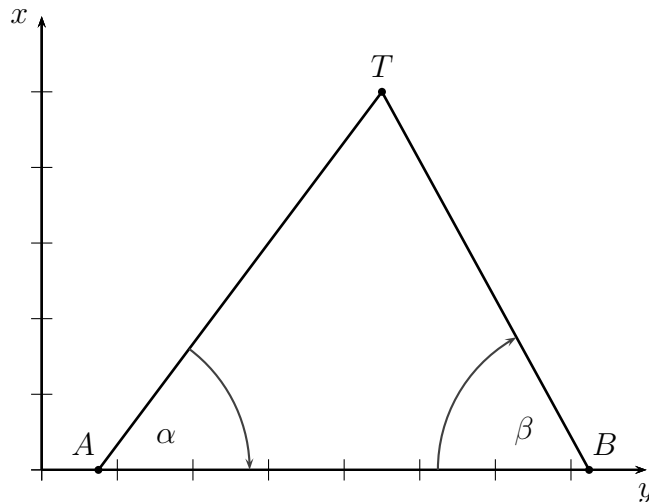
Izračunajmo še vse tri korelacije:

$$\begin{aligned} \rho_{a\alpha} &= -0.82 \\ \rho_{a\beta} &= 0.82 \\ \rho_{\alpha\beta} &= -1.00 \end{aligned} \quad (40)$$

Rezultati korelacij iz enačbe 40 so zanimivi, saj se vidi, da sta korelaciji $\rho_{a\alpha}$ in $\rho_{a\beta}$ enaki, le predznak imata nasproten. Rezultat je pričakovan, saj se z večanjem stranice a kot α večja, v enaki meri pa se manjša kot β . Zato tudi ni presenečenje, da sta kota α in β popolnoma negativno korelirana ($\rho_{\alpha\beta} = -1.00$).

1.7 Primer naloge – Zunanji urez

Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10 \text{ m}, 0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva kota, in sicer $\alpha = 30^\circ$ in $\beta = 45^\circ$, oba z natančnostjo ($\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1'$), kot to prikazuje slika 7. Izračunajte koordinate točke T , kovariančno matriko Σ_T položaja točke T , natančnosti obeh koordinat σ_{y_T} , σ_{x_T} in njuno korelacijo $\rho_{y_T x_T}$.



Slika 7: Opazovanja zunanjega ureza za določitev koordinat točke T

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} . Izmerjena imamo dva kota, torej $n = 2$, in sicer kota α in β . Vektor opazovanj \mathbf{x} vsebuje numerične vrednosti opazovanj, ki so podane v radianih, torej:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.52360 \\ 0.78540 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Kovariančna matrika Σ_{xx} je diagonalna, saj ni podanih korelacij med opazovanji. Ker sta opazovanji enake natančnosti, je matrika tudi skalarna matrika, oblike:

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.46160 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & 8.46160 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \quad (42)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznanek \mathbf{y} . Zanimajo nas koordinate točke T , torej je $m = 2$, vektor neznanek pa ima obliko:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \quad (43)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznančkami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznanek \mathbf{y} .

Izračun neznanek sledi poteku izračuna zunanjega ureza. Ker pa imamo poenostavljen primer, saj točki A in B ležita na osi y (imata enako koordinato x), je postopek

malo lažji. Prvo izračunamo stranico s , ki predstavlja dolžino med točkama A in T . Iz sinusnega izreka dobimo:

$$a = d_{AB} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha + \beta} = 65.885 \text{ m} \quad (44)$$

Koordinate točke T izračunamo tako, da izhahamo iz točke A in uporabimo stranico a in kot α . Velja:

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + a \cos \alpha = d_{AB} \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 67.058 \text{ m} \\ x_T &= x_A + a \sin \alpha = d_{AB} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 32.942 \text{ m} \end{aligned} \quad (45)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Izračunati moramo vseh 2×2 parcialnih odvodov. Oblike parcialnih odvodov so enake:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_T}{\partial \alpha} &= \frac{-d_{AB}}{2} \frac{\sin 2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} & \frac{\partial y_T}{\partial \beta} &= \frac{d_{AB}}{2} \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \\ \frac{\partial x_T}{\partial \alpha} &= d_{AB} \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} & \frac{\partial x_T}{\partial \beta} &= d_{AB} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (46)$$

Jakobijeva matrika \mathbf{J} je enaka:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_T}{\partial \alpha} & \frac{\partial y_T}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x_T}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_T}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48.23085 & 41.76915 \\ 48.23085 & 24.11543 \end{bmatrix} \quad (47)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} (enačba 42) in jakobijevo matriko \mathbf{J} (enačba 47), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank Σ_{yy} :

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy} &= \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{y_T}^2 & \sigma_{y_T x_T} \\ \sigma_{y_T x_T} & \sigma_{x_T}^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3.4446 \times 10^{-4} & -1.1160 \times 10^{-4} \\ -1.1160 \times 10^{-4} & 2.4604 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Iz diagonale kovariančne matrike neznank Σ_{yy} iz enačbe 38 izračunamo natančnosti neznank, to sta standardna odklona σ_{y_T} in σ_{x_T} :

$$\begin{aligned} \sigma_{y_T} &= 0.019 \text{ m} \\ \sigma_{x_T} &= 0.016 \text{ m} \end{aligned} \quad (49)$$

Izračunajmo še korelacijo $\rho_{y_T x_T}$:

$$\rho_{y_T x_T} = -0.38 \quad (50)$$