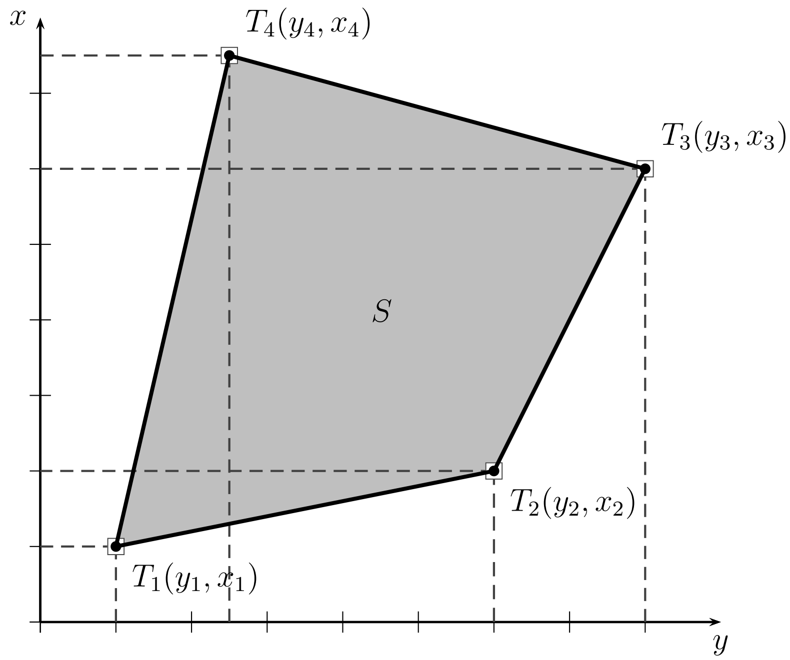
Prenos varianc in kovarianc – Površina zaključenega poligona

Določiti želimo površino parcele S, kjer smo z geodetskimi metodami določili koordinate štirih točk, kot to prikazuje slika 1. Koordinate točk so $T_1(y_1, x_1) = (10\,\mathrm{m}, 10\,\mathrm{m})$, $T_2(y_2, x_2) = (60\,\mathrm{m}, 20\,\mathrm{m})$, $T_3(y_3, x_3) = (80\,\mathrm{m}, 60\,\mathrm{m})$ in $T_4(y_4, x_4) = (25\,\mathrm{m}, 75\,\mathrm{m})$, podane pa imamo tudi natančnosti vseh koordinat, in sicer $\sigma_{y_1} = 0.010\,\mathrm{m}$, $\sigma_{x_1} = 0.020\,\mathrm{m}$, $\sigma_{y_2} = 0.015\,\mathrm{m}$, $\sigma_{x_2} = 0.020\,\mathrm{m}$, $\sigma_{y_3} = 0.005\,\mathrm{m}$, , $\sigma_{x_3} = 0.005\,\mathrm{m}$, $\sigma_{y_4} = 0.020\,\mathrm{m}$, $\sigma_{x_4} = 0.010\,\mathrm{m}$. Izračunaj površino parcele S, njeno natančnost σ_S in korelacije površine parcele z vsemi opazovanji $(\rho_{Sy_1}, \ldots, \rho_{Sx_4})$.



Slika 1: Določitev površine iz koordinat točk poligona

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo varianČno-kovariančno matriko $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$.
   Računamo površino S iz koordinat štirih točk, torej $n =$ ___. Vektor opazovanj $\mathbf{x}$ ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ y_2 \\ x_2 \\ y_3 \\ x_3 \\ y_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Variance opazovanj, ki sestavljajo variančno-kovariančno matriko $\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$ velikosti ___ $\times$

___, so:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{y_1}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 & \sigma_{x_1}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 \\
\sigma_{y_2}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 & \sigma_{x_2}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 \\
\sigma_{y_3}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 & \sigma_{x_3}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 \\
\sigma_{y_4}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 & \sigma_{x_4}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2
\end{aligned}
\tag{2}
$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j $(j = 1, \dots, m)$ in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   Ker računamo površino parcele (poligona) S, je zato število neznank enako $m =$ ___.
   Vektor neznank $\mathbf{y}$ je podan z:
   $$\mathbf{y} = \left[\ S\ \right] \tag{3}$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $(j = 1, \dots, m)$ in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.
   Površina zaključenega poligona na osnovi koordinat točk poligona se za podan primer izračuna kot:
   $$
   \begin{aligned}
   S = &\frac{1}{2}(y_1 - y_2)(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(y_2 - y_3)(x_2 + x_3) + \\
   &\frac{1}{2}(y_3 - y_4)(x_3 + x_4) + \frac{1}{2}(y_4 - y_1)(x_4 + x_1)
   \end{aligned}
   \tag{4}
   $$
   Za izračun površine S iz enačbe 4 uporabimo numerične vrednosti opazovanj iz enačbe 1 in dobimo:
   $$S = \_\_\mathrm{m}^2 \tag{5}$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Parcialni odvodi enačbe 4 po vseh koordinatah (opazovanjih) imajo, po krajši matematični akrobaciji, obliko:
   $$
   \begin{aligned}
   \frac{\partial S}{\partial y_1} &= \frac{x_2 - x_4}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_1} &= -\frac{y_2 - y_4}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} \\
   \frac{\partial S}{\partial y_2} &= \frac{x_3 - x_1}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_2} &= -\frac{y_3 - y_1}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} \\
   \frac{\partial S}{\partial y_3} &= \frac{x_4 - x_2}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_3} &= -\frac{y_4 - y_2}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} \\
   \frac{\partial S}{\partial y_4} &= \frac{x_1 - x_3}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m} & \frac{\partial S}{\partial x_4} &= -\frac{y_1 - y_3}{2} = \_\_\_\_\mathrm{m}
   \end{aligned}
   \tag{6}
   $$
   Matrika $\mathbf{J}$ je velikosti $m \times n =$ ___ $\times$ ___ in ima obliko:
   $$
   \begin{aligned}
   \mathbf{J} = &\left[\ \frac{\partial S}{\partial y_1}\ \ \frac{\partial S}{\partial x_1}\ \ \frac{\partial S}{\partial y_2}\ \ \frac{\partial S}{\partial x_2}\ \ \frac{\partial S}{\partial y_3}\ \ \frac{\partial S}{\partial x_3}\ \ \frac{\partial S}{\partial y_4}\ \ \frac{\partial S}{\partial x_4}\ \right] = \\
   &\left[\ \_\_\mathrm{m}\ \ \_\_\mathrm{m}\ \ \_\_\mathrm{m}\ \ \_\_\mathrm{m}\ \ \_\_\mathrm{m}\ \ \_\_\mathrm{m}\ \ \_\_\mathrm{m}\ \ \_\_\mathrm{m}\ \right]
   \end{aligned}
   \tag{7}
   $$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$.
Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ (iz enačbe 2) in jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ (enačba 7), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$:

$$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ izračunamo natančnosti neznank σ_j $(j = 1, \ldots, m)$ in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, m \wedge i \neq j)$.
Natančnost površine S je torej:

$$\sigma_S = \_\_\mathrm{m}^2 \tag{9}$$

7. Izračun korelacije neznanke S z vsemi opazovanji iz vektorja $\mathbf{x}$.
Za izračun korelacije med neznankami in opazovanji moramo razširiti vektor neznank v (glej poglavje 1.2 datoteke *PrenosVarCovar.pdf*) tako, da bo enak::

$$\overline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} S \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Izračunajmo sedaj razširjeno jakobijevo matriko $\overline{\mathbf{J}}$, ki ima obliko:

$$\overline{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Variančno kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}_{\overline{yy}}$ ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma}_{\overline{yy}} = \overline{\mathbf{J}}\mathbf{\Sigma}_{xx}\overline{\mathbf{J}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{xx} \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} & \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx} \\ \mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Sigma}_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{yy} & \mathbf{\Sigma}_{yx} \\ \mathbf{\Sigma}_{xy} & \mathbf{\Sigma}_{xx} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Korelacije med neznankami in opazovanji pridobimo iz matrike $\mathbf{\Sigma}_{yx}$, numerično pa velja:

$$\begin{aligned} \rho_{Sy_1} &= \_\_\_\_\_ & \rho_{Sx_1} &= \_\_\_\_\_ \\ \rho_{Sy_2} &= \_\_\_\_\_ & \rho_{Sx_2} &= \_\_\_\_\_ \\ \rho_{Sy_3} &= \_\_\_\_\_ & \rho_{Sx_3} &= \_\_\_\_\_ \\ \rho_{Sy_4} &= \_\_\_\_\_ & \rho_{Sx_4} &= \_\_\_\_\_ \end{aligned} \tag{13}$$