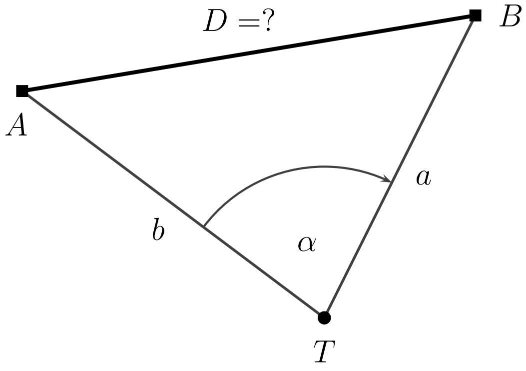
Prenos varianc in kovarianc – Izračun dolžine D

Določiti želimo dolžino D med točkama A in B in njeno natančnost σ_D. A ker je med točkama ovira, dolžine neposredno ne moremo izmeriti, zato smo stabilizirali začasno točko T, na kateri smo izmerili dve stranici (a in b) in en kot (α). Situacijo prikazuje slika 1. Opazovanja s pripadajočimi natančnostmi so: $a = 40.00\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0.03\,\mathrm{m}$), $b = 60.00\,\mathrm{m}$ ($\sigma_b = 0.05\,\mathrm{m}$) in $\alpha = 45°$ ($\sigma_\alpha = 2.5'$). Izračunaj dolžino D, njeno natančnost σ_D in korelacijo dolžine D z vsemi opazovanji: ρ_{Da}, ρ_{Db} in $\rho_{D\alpha}$.



Slika 1: Prikaz meritev za določitev dolžine D

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{xx}$.
   V navodilih so podana tri opazovanja, to sta stranici a in b ter kot α, saj imamo za vsa tri opazovanja podane tudi natančnosti ($n =$ ___). Vektor opazovanj $\mathbf{x}$ je velikosti ___ $\times\, 1$, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Sestavimo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ opazovanj. Le-ta so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Matrika je velikosti ___ $\times$ ___, variance (diagonalni elementi matrike) pa imajo vrednosti:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 \\ \sigma_b^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 \\ \sigma_\alpha^2 &= \_\_ \end{aligned} \tag{2}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
   V prvi vrsti nas zanima izračun dolžine D. A ker naloga zahteva tudi izračun korelacij med neznanko (D) in vsemi opazovanji (a, b in α), potem bomo vektor

neznank $\mathbf{y}$ razširili tako, da bomo vanj dali tako neznanko D kot tudi vsa opazovanja a, b in α, Zato bo $n =$ ___ in vektor $\mathbf{y}$ bo velikosti ___ $\times 1$:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} D \\ a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $(j = 1, \ldots, m)$ in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.
   Izraziti moramo, kako se dolžina D izrazi s stranicama a in b ter kotom α. Iz slike 1 vidimo, da imamo trikotnik, kjer imamo izmerjeni dve stranici in vmesni kot, računamo pa tretjo stranico. Uporabimo torej kosinusni izrek in dobimo:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} = \_\_\mathrm{m} \tag{4}$$

   Za vse ostale tri “neznanke” pa nastavimo identitete:

$$a = a \qquad b = b \qquad \alpha = \alpha \tag{5}$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
   Izračunajmo prvo parcialne odvode neznanke D po vseh treh opazovanjih. Odvajamo enačbo 4 po a, b in α in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a} &= \frac{a - b\cos\alpha}{D} = \_\_ \\ \frac{\partial D}{\partial b} &= \frac{b - a\cos\alpha}{D} = \_\_ \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha} &= \frac{ab\sin\alpha}{D} = \_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{6}$$

   Odvajati moramo tudi enačbe 5 po vseh treh opazovanjih. Jakobijeva matrika je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial a} & \frac{\partial D}{\partial b} & \frac{\partial D}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial a}{\partial b} & \frac{\partial a}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial b}{\partial a} & \frac{\partial b}{\partial b} & \frac{\partial b}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial a} & \frac{\partial \alpha}{\partial b} & \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$.
   Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ (enačba 2) in jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ (enačba 7), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & \sigma_{Da} & \sigma_{Db} & \sigma_{D\alpha} \\ \sigma_{Da} & \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ \sigma_{Db} & 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ \sigma_{D\alpha} & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} \\ \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} \\ \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} \\ \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} & \rule{2em}{0.4pt} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ izračunamo natančnosti neznank σ_j $(j = 1, \ldots, m)$ in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, m \wedge i \neq j)$.
   Prvo izračunajmo natančnost σ_D izračunane dolžine D. Dobimo:

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_D^2} = \rule{1.5em}{0.4pt}\mathrm{m} \tag{9}$$

   Iz prve vrstice kovariančne matrike neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ v enačbi 8 pa izračunajmo še vse tri korelacije neznanke z opazovanji, torej:

$$\begin{aligned} \rho_{Da} &= \frac{\sigma_{Da}}{\sigma_D \sigma_a} = \rule{1.5em}{0.4pt} \\ \rho_{Db} &= \frac{\sigma_{Db}}{\sigma_D \sigma_b} = \rule{1.5em}{0.4pt} \\ \rho_{D\alpha} &= \frac{\sigma_{D\alpha}}{\sigma_D \sigma_\alpha} = \rule{1.5em}{0.4pt} \end{aligned} \tag{10}$$