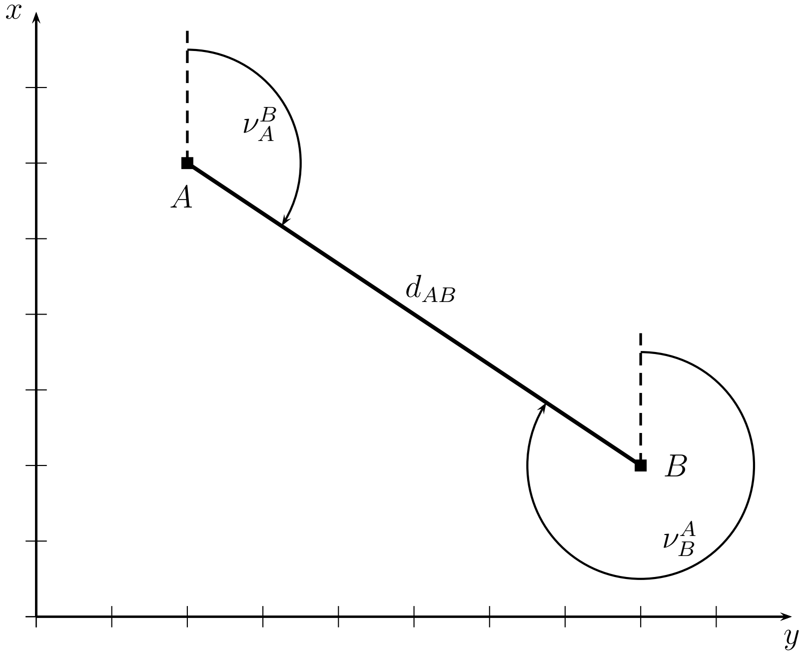
Prenos varianc in kovarianc – Geodetski polarni in kartezični koordinatni sistem:

Podani imamo dve točki v geodetskem kartezičnem koordinatnem sistemu s pripadajočimi natančnostmi, in sicer $A(y_A, x_A) = (461\,300.0\,\mathrm{m}, 100\,600.0\,\mathrm{m})$ ($\sigma_{y_A} = 0.1\,\mathrm{m}$, $\sigma_{x_A} = 0.075\,\mathrm{m}$) in $B(y_B, x_B) = (461\,500.0\,\mathrm{m}, 100\,500.0\,\mathrm{m})$ ($\sigma_{y_B} = 0.08\,\mathrm{m}$, $\sigma_{x_B} = 0.05\,\mathrm{m}$), kot to prikazuje slika 1. Izračunaj komponente geodetskega polarnega koordinatnega sistema, to so: dolžino med točkama d_{AB} in oba smerna kota ν_A^B ter ν_B^A ter njihove natančnosti ($\sigma_{d_{AB}}$, $\sigma_{\nu_A^B}$ in $\sigma_{\nu_B^A}$) in korelacije ($\rho_{d_{AB}\nu_A^B}$, $\rho_{d_{AB}\nu_B^A}$ in $\rho_{\nu_A^B\nu_B^A}$).



Slika 1: Skica obeh točk in elementov geodetskega polarnega koordinatnega sistema

1. Sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{x}$ in pripadajočo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{xx}$.
   Podatki naloge kažejo na to, da imamo $n =$ __ opazovanj, to so koordinate obeh točk, saj imajo podane natančnosti. Vetkor opazovanj $\mathbf{x}$ je torej:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Sestavimo variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ opazovanj, ki so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Matrika je zato diagonalna, po diagonali pa so variance enake:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_A}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 \quad \sigma_{x_A}^2 = \_\_\mathrm{m}^2 \\ \sigma_{y_B}^2 &= \_\_\mathrm{m}^2 \quad \sigma_{x_B}^2 = \_\_\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j $(j = 1, \ldots, m)$ in sestavimo vektor neznank $\mathbf{y}$.
Zanimajo nas vsi trije elementi geodetskega polarnega koordinatnega sistema, torej:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d_{AB} \\ \nu_A^B \\ \nu_B^A \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $(j = 1, \ldots, m)$ in izračunamo vrednosti neznank $\mathbf{y}$.
Izhajamo iz enačb pretvorbe med geodetskim kartezičnim koordinatnim sistemom in geodetskih polarnim koordinatnim sistemom, torej:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \underline{\hspace{2em}}\text{m} \\ \nu_A^B &= \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \underline{\hspace{2em}}\text{m} \end{aligned} \tag{4}$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ velikosti $m \times n$.
Ker imamo $n =$ __ neznanke in $n =$ __ opazovanja, je matrika $\mathbf{J}$ dimenzije __ $\times$ __ in ima obliko (parcialne odvode izpeljite sami za vajo):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} \\ \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} & \underline{\hspace{1em}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$.
Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}_{xx}$ (enačba 2) in jakobijevo matriko $\mathbf{J}$ (enačba 5), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{J}\mathbf{\Sigma}_{xx}\mathbf{J}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} \sigma^2_{d_{AB}} & \sigma_{d_{AB}\nu_A^B} & \sigma_{d_{AB}\nu_B^A} \\ \sigma_{d_{AB}\nu_A^B} & \sigma^2_{\nu_A^B} & \sigma_{\nu_A^B\nu_B^A} \\ \sigma_{d_{AB}\nu_B^A} & \sigma_{\nu_A^B\nu_B^A} & \sigma^2_{\nu_B^A} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\hspace{2em}} & \underline{\hspace{2em}} & \underline{\hspace{2em}} \\ \underline{\hspace{2em}} & \underline{\hspace{2em}} & \underline{\hspace{2em}} \\ \underline{\hspace{2em}} & \underline{\hspace{2em}} & \underline{\hspace{2em}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank $\mathbf{\Sigma}_{yy}$ izračunamo natančnosti neznank σ_j $(j = 1, \ldots, m)$ in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, m \wedge i \neq j)$.
Prvo izračunajmo natančnosti izračunanih količin:

$$\sigma_{d_{AB}} = \underline{\hspace{1em}}\text{m} \qquad \sigma_{\nu_A^B} = \underline{\hspace{1em}}'' \qquad \sigma_{\nu_B^A} = \underline{\hspace{1em}}'' \tag{7}$$

V drugo pa izračunajmo še korelacije med neznankami:

$$\rho_{d_{AB}\nu_A^B} = \underline{\hspace{1em}} \qquad \rho_{d_{AB}\nu_B^A} = \underline{\hspace{1em}} \qquad \rho_{\nu_A^B\nu_B^A} = \underline{\hspace{1em}} \tag{8}$$

Izračunane natančnosti iz enačbe 7 in korelacije iz enačbe 8 podajajo zanimive rezultate. Vidimo, da sta natančnosti obeh kotov enaki, kota sta popolnoma korelirana ($\rho_{\nu_A^B \nu_B^A} =$ __), oba kota sta tudi enako korelirana z dolžino. Rezultat je seveda pričakovan. Smerna kota sta povezana z enačbo:

$$\nu_B^A = \nu_A^B + 180^\circ \tag{9}$$

Kar pomeni, da če se spremeni en kot, se mora za enako vrednost spremeniti tudi drug kot. Taka linearna enačba je že zadosten pogoj za popolno korelacijo.