

Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Študijski program 1. stopnje

Geodezija in geoinformatika, 2. letnik

IZRAVNALNI RAČUN 2 - VAJE

Zakon o prenosu varianc in kovarianc

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Različica: 25. november 2025

Kazalo vsebine

Kazalo vsebine	i
Kazalo slik	ii
Kazalo preglednic	iii
1 ZAKON O PRENOSU VARIANC IN KOVARIANC	1
1.1 Izračun variančno-kovariančne matrike neznank	1
1.2 Izračun korelacije med opazovanji in neznankami	1
1.3 Postopek izvedbe zakona o prenosu varianc in kovarianc	3
1.4 Geometrijski prikaz prenosa varianc in kovarianc pri primerih geodetske izmere	3
1.4.1 Polarna izmera	3
1.4.2 Zunanji urez	4
1.4.3 Ločni presek	5
1.4.4 Izmera GNSS	5
1.5 Primer 1 – trigonometrično višinomerstvo	7
1.6 Primer 2 – geodetski polarni in kartezični koordinatni sistem	9
1.7 Primer 3 – izračun dolžine med točkama	11
1.8 Primer 4 – parcela pravokotne oblike, merjeni stranici	14
1.9 Primer 5 – slepi poligon treh novih točk	16
1.10 Primer 6 – površina zaključenega poligona	20
1.11 Primer 7 – zunanji urez	23

Kazalo slik

1-1	Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri polarni izmeri	4
1-2	Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri zunanjem urezu	5
1-3	Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri ločnem preseku	6
1-4	Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri izmeri GNSS	7
1-5	Skica obeh točk in elementov geodetskega polarnega koordinatnega sistema	9
1-6	Prikaz meritev za določitev dolžine med točkama	11
1-7	Skica opazovanj v parceli oblike pravokotnega trikotnika	14
1-8	Skica slepega poligona dveh danih in treh novih točk	16
1-9	Določitev površine iz koordinat točk poligona	20
1-10	Opazovanja zunanjega ureza za določitev koordinat nove točke	23

Kazalo preglednic

1 ZAKON O PRENOSU VARIANC IN KOVARIANC

Pri prenosu pravih pogreškov nas je zanimalo, kakšno napako povzročimo pri neznanki, če imamo podan pravi pogrešek opazovanja. V splošnem pravih pogreškov ne poznamo, slučajnost opazovanj pa opišemo z variančno-kovariančno matriko opazovanj Σ . Kadar poskušamo ugotoviti, kakšna je kovariančna matrika neznank Σ_{yy} , ko poznamo kovariančno matriko opazovanj (ali neodvisnih parametrov Σ_{xx}), potem govorimo o **zakonu o prenosu varianc in kovarianc**.

1.1 Izračun variančno-kovariančne matrike neznank

V geodeziji opazujemo količine - opazovanja, ki so z neznankami, ki jih želimo izračunati, povezane posredno. Tako imamo m neznanih količin, ki jih označimo z $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$, ki so v funkcijski povezavi z n opazovanji, $x_i, i = 1, \dots, n$. Funkcijsko odvisnost zapišemo kot:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1-1)$$

Matrično lahko enačbo (1-1) zapišemo tudi kot:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1-2)$$

V enačbi (1-2) predstavlja \mathbf{x} vektor opazovanj velikosti $n \times 1$, \mathbf{y} vektor računanih neznank velikosti $m \times 1$ in \mathbf{F} (v splošnem) nelinearne funkcije iz enačb (1-1). Poudariti je potrebno, da **pri zakonu o prenosu varianc in kovarianc nimamo nadštevilnih meritev**, oz. $r = n - n_0 = 0$.

Ob podani kovariančni matriki opazovanj Σ_{xx} nas zanima, kakšna je kovariančna matrika neznank, oziroma kako se preko funkcij \mathbf{F} prenese natančnost opazovanj v neznanke. Rezultat je kovariančna matrika neznank Σ_{yy} , ki ima obliko:

$$\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T \quad (1-3)$$

Matrika \mathbf{J} v enačbi (1-3) predstavlja Jakobijevo matriko velikosti $m \times n$, oziroma matriko vseh parcialnih odvodov, vseh neznank ($y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$) po vseh opazovanjih ($x_i, i = 1, \dots, n$). Jakobijeva matrika ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

1.2 Izračun korelacije med opazovanji in neznankami

Izračunana variančno-kovariančna matrika Σ_{yy} neznank iz enačbe (1-3) je kvadratna matrika, ki ima po diagonali variance neznank, izven-diagonalni elementi pa nakazujejo na morebitno korelacijo

med neznankami. Enako velja tudi za variančno-kovariančno matriko opazovanj Σ_{yy} , tudi tu izven-diagonalni elementi nakazujejo na korelacijo med opazovanji. Vprašanje, ki se pojavi pa je, kako pa bi prišli do korelacije med opazovanji in neznankami?

Da lahko izračunamo korelacije med neznankami in opazovanji, moramo pridobiti tako variančno-kovariančno matriko $\Sigma_{\bar{y}\bar{y}}$, ki bo vsebovala stohastične informacije tako neznank kot tudi opazovanj. Da pa jo lahko pridobimo, moramo prvo vektor neznank razširiti tako, da bo vseboval vse neznanke iz vektorja \mathbf{y} in vsa opazovanja iz vektorja \mathbf{x} . Vektor označimo z $\bar{\mathbf{y}}$ in je oblike:

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

Enačba (1-2) nam prikazuje, kako se iz opazovanj (\mathbf{x}) izračuna neznanke (\mathbf{y}), torej lahko funkcijsko povezavo glede na obliko novega (razširjenega) vektorja neznank iz enačbe (1-5) zapišemo kot:

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \quad (1-6)$$

Na osnovi enačbe 1-5 izračunajmo razširjeno Jakobijevo matriko $\bar{\mathbf{J}}$, ki ima obliko:

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

Jakobijeva matrika $\bar{\mathbf{J}}$ iz enačbe (1-7) ima enako število stolpcev kot Jakobijeva matrika iz enačbe (1-4) (število opazovanj se ni spremenilo), medtem ko ima pa več vrstic (dodali smo opazovanja med neznanke). Vidi se, da je prvi del, to so parcialni odvodi po neznankah v vektorju \mathbf{y} , ostaja enak, v drugem delu pa imamo enotsko matriko (odvodi opazovanj po samih seboj). Variančno kovariančna matrika $\Sigma_{\bar{y}\bar{y}}$ ima, glede na enačbo zakona o prenosu varianc in kovarianc iz enačbe (1-3), obliko:

$$\Sigma_{\bar{y}\bar{y}} = \bar{\mathbf{J}}\Sigma_{xx}\bar{\mathbf{J}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Sigma_{xx} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T & \mathbf{J}\Sigma_{xx} \\ \Sigma_{xx}\mathbf{J}^T & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

Iz enačbe (1-8) vidimo, da po diagonali dobimo ravno variančno-kovariančni matriki neznank Σ_{yy} (prvi del) in opazovanj Σ_{xx} (drugi del). Izven-diagonalni matriki Σ_{yx} in Σ_{xy} pa sta oblike:

$$\Sigma_{yx} = \Sigma_{xy}^T = \mathbf{J}\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1x_1} & \sigma_{y_1x_2} & \sigma_{y_1x_3} & \cdots & \sigma_{y_1x_n} \\ \sigma_{y_2x_1} & \sigma_{y_2x_2} & \sigma_{y_2x_3} & \cdots & \sigma_{y_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{y_mx_1} & \sigma_{y_mx_2} & \sigma_{y_mx_3} & \cdots & \sigma_{y_mx_n} \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

Matrika Σ_{yx} predstavlja izhodišče za izračun korelacij med neznankami in opazovanji. Za neznanko j in opazovanje i tako dobimo:

$$\rho_{y_jx_i} = \frac{\sigma_{y_jx_i}}{\sigma_{y_j}\sigma_{x_i}} \quad (1-10)$$

Kovarianco $\rho_{y_jx_i}$ dobimo iz matrike Σ_{yx} iz enačbe (1-9) (j -ta vrstica in i -ti stolpec), standardni odklon σ_{y_j} dobimo iz variančno-kovariančne matrike Σ_{yy} (vzamemo j -ti diagonalni element) in standardni odklon σ_{x_i} iz variančno-kovariančne matrike Σ_{xx} (vzamemo i -ti diagonalni element), ki pa predstavlja podatek naloge.

1.3 Postopek izvedbe zakona o prenosu varianc in kovarianc

Pri prenosu varianc in kovarianc tako postopamo v naslednjem vrstnem redu:

1. Pridobimo opazovanja x_i ($i = 1, \dots, n$) in informacijo o natančnosti opazovanj; standardne odklone opazovanj σ_i ($i = 1, \dots, n$) in morebitne korelacije med opazovanji ρ_{ij} ($i, j = 1, \dots, n \wedge i \neq j$). Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .
2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank \mathbf{y} .
3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank \mathbf{y} .
4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.
5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.
6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami ρ_{ij} ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).
7. Če naloga zahteva, iz variančno-kovariančne matrike Σ_{yx} izračunamo tudi korelacije med neznankami in opazovanji $\rho_{y_j x_i}$ ($j = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n$).

1.4 Geometrijski prikaz prenosa varianc in kovarianc pri primerih geodetske izmere

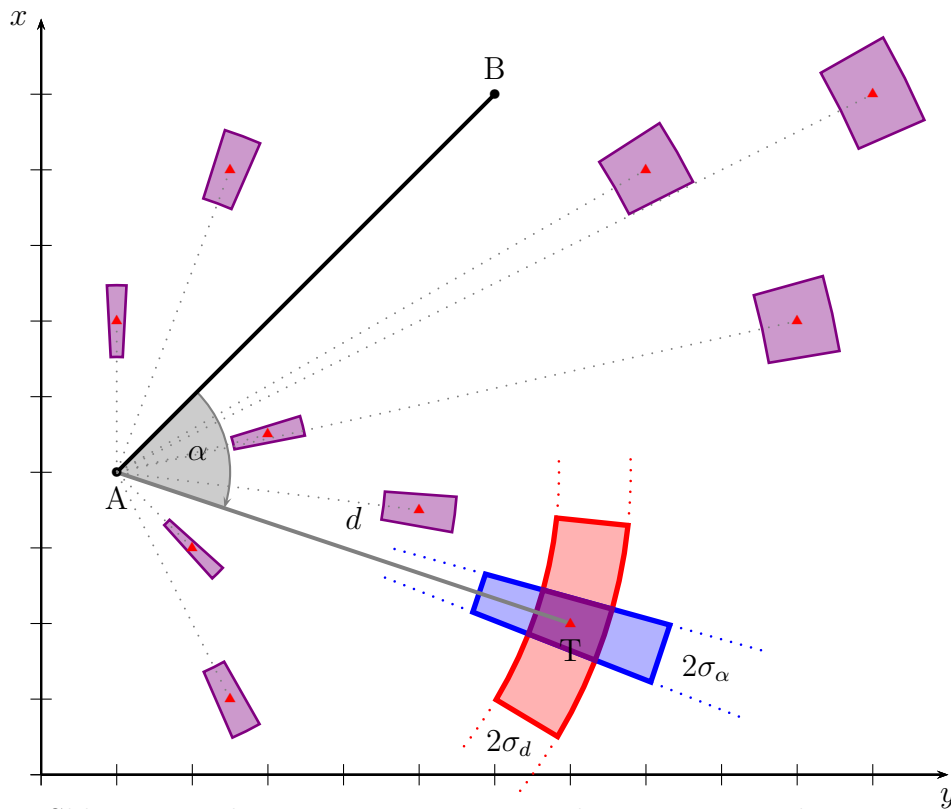
Predstavimo si geometrijsko ozadje zakona o prenosu varianc in kovarianc na primerih določitve koordinat novih točk v ravnini. Prikazali bomo štiri metode izmere, to so polarna izmera, zunanji urez, ločni presek in izmera GNSS. V vseh primerih imamo na voljo dve opazovanji, s katerima izračunamo koordinate nove točke. Pri terestričnih metodah določitve koordinat (polarna izmera, zunanji urez in ločni presek) izhajamo iz dveh danih točk, medtem ko pri izmeri GNSS izhajamo iz ene same dane točke.

V spodnjih primerih bomo prikazali, kako lahko geometrijsko prikažemo natančnost izmerjenih opazovanj in kako se le-ta odraža pri izračunu koordinat. Koordinate načeloma izračunamo preko različnih matematičnih formul, geometrijsko pa jih dobimo s preseki premic in/ali krožnic.

1.4.1 Polarna izmera

Pri polarni izmeri merimo polarni kot (α) in dolžino (d). Obe opazovanji izmerimo na eni dani točki (A), kjer nam izhodiščno smer (orientacijo) podaja smer proti drugi dani točki (B). Dolžina je izmerjena z natančnostjo σ_d , medtem ko je kot izmerjen z natančnostjo σ_α . Situacijo polarne izmere prikazuje slika 1–1. Detajlen prikaz geometrije je pri točki, kjer je oznaka T prisotna. Ostale lokacije prikazujejo vpliva natančnosti opazovanj in geometrije na kakovost določenega položaja točke T pri polarni izmeri.

Geometrijsko je položaj nove točke T določen s presečiščem krožnice in premice. Krožnico realizira izmerjena dolžina d , premico pa krak kota α , od stojiščne točke A proti novi točki T . Geometrijski prikaz natančnosti opazovanj lahko vidimo iz slike. Natančnost izmerjenega kota nam pove, da je



Slika 1–1: Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri polarni izmeri

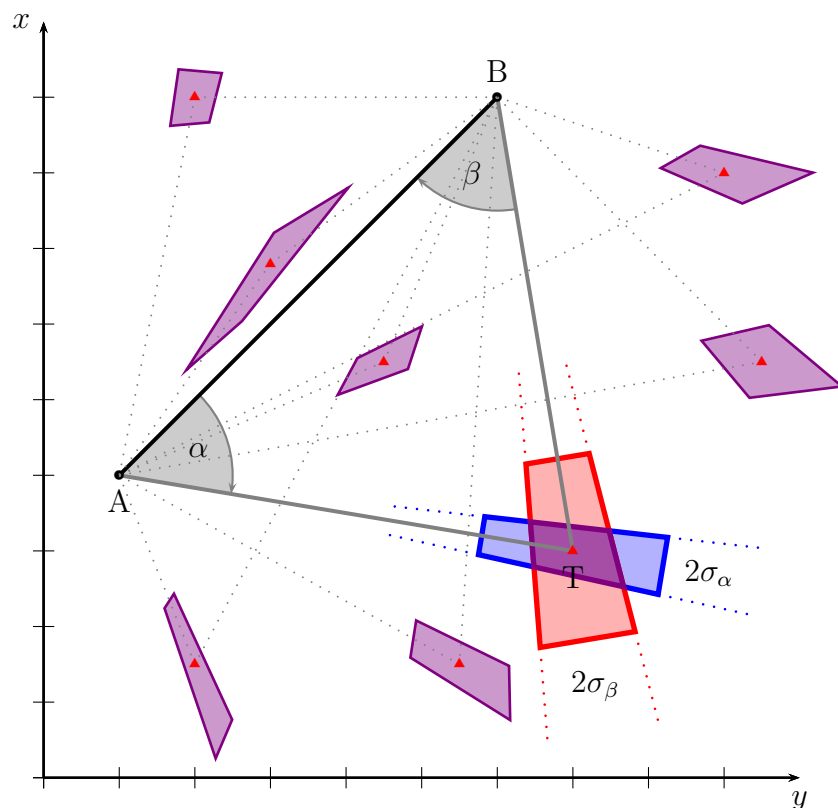
pravi položaj točke T lahko malo levo ali malo desno glede na zveznico \overline{AT} , širina območja je podana s standardnim odklonom. Na sliki je to predstavljeno z modrimi pravokotniki. Natančnost izmerjene dolžine pa nam pove, da je pravi položaj točke T lahko malo bližje ali malo bolj stran, glede na točko A . Na sliki je to predstavljeno z rdečimi deli kolobarja. Kombinacija obeh opazovanj pa so vijolični “pravokotniki”¹, ki predstavljajo območje, kjer se zelo verjetno nahaja prava točka T .

Slika 1–1 prikazuje številne različne lege točke T , ki se medseboj razlikujejo po tem, da imajo različno orientacijo (smerni kot) in različno oddaljenost, glede na točko A , pri tem, da sta vse kombinacije natančnosti opazovanj enaki. Pri teh položajih točke T prikazujemo samo še vijolične pravokotnike. Iz slike lahko vidimo, da enaka natančnost izmerjene dolžine poda vedno enako dimenzijo vijoličnega pravokotnika v smeri izmerjene dolžine, neodvisno od položaja točke T . Po drugi strani, pa natančnost izmerjenega kota poda različne širine vijoličnih pravokotnikov, prečno na smer \overline{AT} , če se od točke A oddaljujemo. Natančnost položaja točke T je pri polarni izmeri odvisna od oddaljenosti od točke A in neodvisna od smeri orientacije (položaja točke B). Položaj točke T je določen bolj kakovostni, če je bližje točki A in če sta obe opazovanji izmerjeni kakovostno.

1.4.2 Zunanji urez

Podobno, kot pri polarni izmeri, lahko geometrijsko prikažemo tudi zunanji urez, kar prikazujemo na sliki 1–2. Pri zunanjem urezu izmerimo dva kota, α in β , prvega na točki A (med B in T) in drugega na točki B (med A in T). Položaj točke T je določen s presečiščem dveh premic, ki ju definirata oba kota. Natančnosti obeh kotov sta podani s pravokotniki, kjer z modrimi prikazujemo natančnost kota α , z rdečimi pa natančnost kota β . Območje, kjer se verjetno nahana pravi položaj točke je spet prikazan s preseki obeh pravokotnikov in so prikazani v vijoličnem.

¹pri poglavju Elipse pogreškov bomo videli, da pravi položaj točke leži nekje znotraj elipse



Slika 1–2: Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri zunanjem urezu

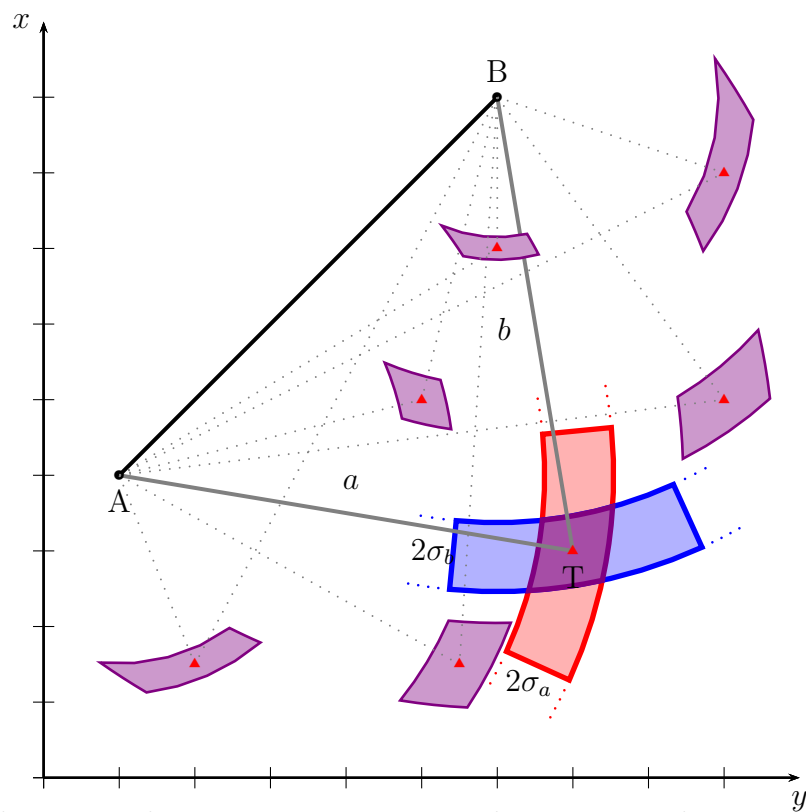
Na sliki 1–2 so prikazani različni položaji točke T , pri tem, da sta natančnosti izmerjenih kotov isti za vse položaje. Iz slike je razvidno, da na velikost in obliko vijoličnega območja vpliva predvsem geometrija točk A , B in T , ki določajo kot, pod katerim se sekata obe premici kotov α in β . Tu lahko ovrednotimo izraz “slabi in dobri preseki”, ki se nanašajo na velikost in obliko vijoličnega območja v odvisnosti od kota, pod katerim se sekata obe premici. Dober presek je takrat, ko je vijolično območje blizu kvadrata in majhno. Slab presek je takrat, ko je vijolično območje zelo veliko ali zelo raztegnjen pravokotnik. Vidimo, da so vijolični pravokotniki manjši, če se bosta obe premici sekali pod pravim kotom. V praksi se zato izogibamo situacij z majhnim kotom presekov.

1.4.3 Ločni presek

Pri ločnem preseku položaj točke T določimo z dvema izmerjenima dolžinama, a in b , geometrijsko pa je položaj določen s presekom dveh krožnic. Na sliki 1–3 različne situacije. Če predpostavimo, da je natančnost obeh dolžin enaka in neodvisna od velikosti dolžine, potem je natančnost položaja točke T odvisna zgolj od geometrije točk A , B in T . Tudi tu težimo k tem, da se obe krožnici sekata pod kotom, ki je bližje pravemu kotu. Položaj točke T pri zelo majhnem presečnem kotu je slabše kakovosti.

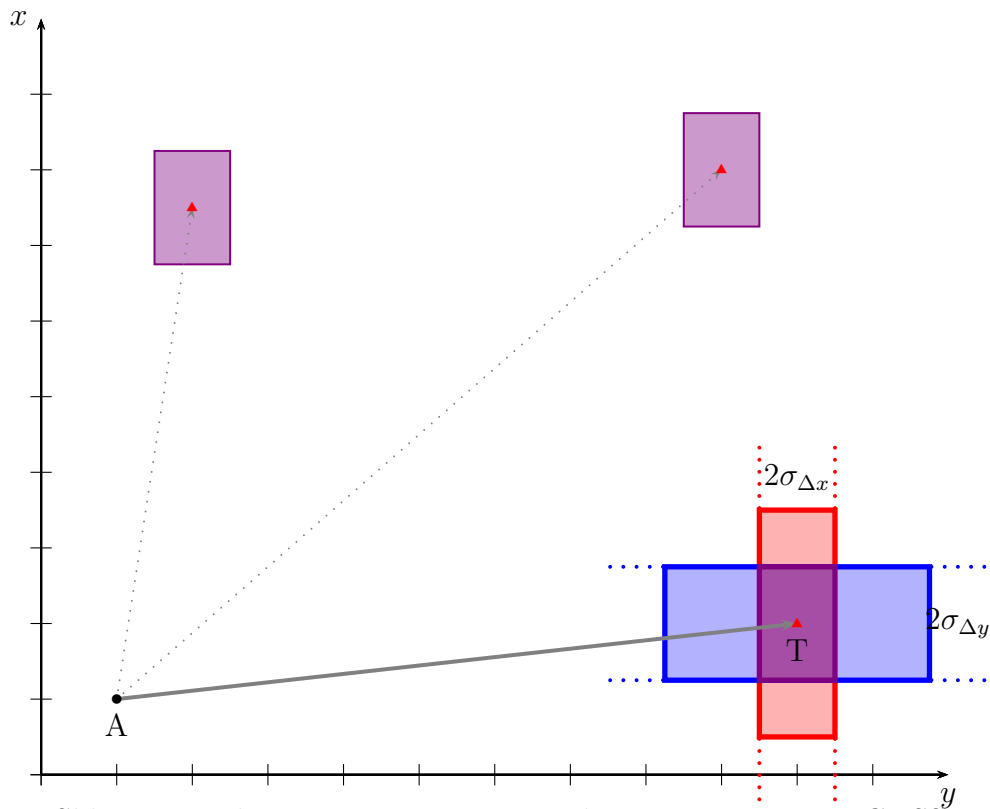
1.4.4 Izmera GNSS

Geometrijski prikaz zakona o prenosu varianc in kovarianc pri izmeri GNSS pa prikazuje slika 1–4. Položaj točke T je določen tako, da med točko A (dana točka) in točko T opazujemo bazni vektor, ki ga v ravnini predstavljata komponenti Δy in Δx . Položaj točke T je presek dveh premic, ki sta med seboj vedno pravokotni, saj je ena vzporedna osi y , druga pa x . Iz slike vidimo, da na kakovost položaja točke T vpliva samo kakovost izmerjenega baznega vektorja, medtem ko geometrija ne igra



Slika 1-3: Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri ločnem preseku

nobene vloge. Izmera GNSS je z geometričnega stališča tudi zelo preprosta, kar se izkaže tudi pri izravnavi baznih vektorjev.



Slika 1–4: Zakon o prenosu varianc in kovarianc pri izmeri GNSS

1.5 Primer 1 – trigonometrično višinerstvo

S postopkom trigonometričnega višinerstva želimo določiti višino H_B točke B in njeno natančnost σ_{H_B} , pri tem, da imamo podano višino $H_A = 320,00$ m točke A , na katero smo prisilno centrali tahimeter in izmerili njegovo višino $i = 25,0$ cm. Na točko B smo postavili reflektor na višino $l = 2,0$ m, z natančnostjo $\sigma_l = 5$ mm. S tahimetrom smo izmerili poševno dolžino $s = 100,0$ m, z natančnostjo $\sigma_s = 1,0$ cm, in zenitno razdaljo $z = 85^\circ$, z natančnostjo $\sigma_z = 15''$. Izračunajte višino točke H_B točke B in njeno natančnost σ_{H_B} .

Postopamo po korakih izračuna, ki so predstavljeni v poglavju 1.3.

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .

Ko sestavljamo vektor opazovanj \mathbf{x} , moramo razlikovati med opazovanji in konstantami. Kot opazovanja obravnavamo vse podatke, za katere imamo podane natančnosti. Iz naloge je razvidno, da imajo natančnosti podana opazovanja s , z in l , medtem ko H_A in i nimata podane natančnosti, zato sta obravnavana kot konstanti. Število opazovanj je $n = 3$, dimenzija vektorja \mathbf{x} pa je zato 3×1 . V vektor opazovanj vstavimo numerične vrednosti, vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} s \\ z \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100,0 \text{ m} \\ 1,4835299 \\ 2,0 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

Sestavimo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} opazovanj, ki so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Dobimo:

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 \times 10^{-4} \text{ m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5,288 \times 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 2,500 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank \mathbf{y} .

Ker nas zanima le višina H_B točke B , velja $m = 1$, torej:

$$\mathbf{y} = [H_B] \quad (1-13)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank \mathbf{y} .

Izhajamo iz enačbe trigonometričnega višinomerstva (zanemarimo vpliv refrakcije in ukrivljenosti Zemlje) in dobimo:

$$H_B = H_A + s \cos z + i - l = 326,9656 \text{ m} \quad (1-14)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Izračunati moramo parcialne odvode neznanke po vseh opazovanjih in sestaviti matriko \mathbf{J} . Ker je enačba (1-14) enostavna, bomo samo zapisali Jakobijevo matriko \mathbf{J} :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial H_B}{\partial s} & \frac{\partial H_B}{\partial z} & \frac{\partial H_B}{\partial l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos z & -s \sin z & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,08716 & -99,61947 & -1,00000 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-15)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} (enačba (1-12)) in Jakobijevo matriko \mathbf{J} (enačba (1-15)), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank Σ_{yy} :

$$\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = [\sigma_{H_B}^2] = [7,8243 \times 10^{-5} \text{ m}^2] \quad (1-16)$$

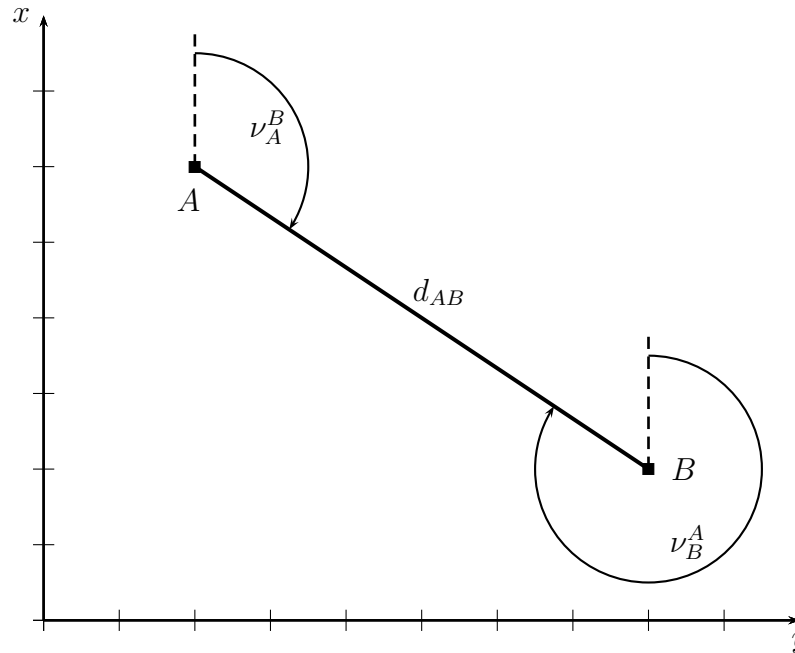
6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Izračunamo še natančnost višine točke B :

$$\sigma_{H_B} = 0,0088 \text{ m} \quad (1-17)$$

1.6 Primer 2 – geodetski polarni in kartezični koordinatni sistem

Podani imamo dve točki v geodetskem kartezičnem koordinatnem sistemu s pripadajočimi natančnostmi, in sicer $A(y_A, x_A) = (461\,300,0\text{ m}, 100\,600,0\text{ m})$ ($\sigma_{y_A} = 0,1\text{ m}$, $\sigma_{x_A} = 0,075\text{ m}$) in $B(y_B, x_B) = (461\,500,0\text{ m}, 100\,500,0\text{ m})$ ($\sigma_{y_B} = 0,08\text{ m}$, $\sigma_{x_B} = 0,05\text{ m}$), kot to prikazuje slika 1–5. Izračunaj komponente geodetskega polarnega koordinatnega sistema, to so: dolžino med točkama d_{AB} in oba smerna kota ν_A^B ter ν_B^A ter njihove natančnosti ($\sigma_{d_{AB}}$, $\sigma_{\nu_A^B}$ in $\sigma_{\nu_B^A}$) in korelacije ($\rho_{d_{AB}\nu_A^B}$, $\rho_{d_{AB}\nu_B^A}$ in $\rho_{\nu_A^B\nu_B^A}$).



Slika 1–5: Skica obeh točk in elementov geodetskega polarnega koordinatnega sistema

Rešitev naloge poteka po spodnjih alinejah.

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .

Podatki naloge kažejo na to, da imamo $n = 4$ opazovanj, to so koordinate obeh točk, saj imajo podane natančnosti. Vektor opazovanj \mathbf{x} je torej:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_A \\ x_A \\ y_B \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461\,300,0\text{ m} \\ 100\,600,0\text{ m} \\ 461\,500,0\text{ m} \\ 100\,500,0\text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

Sestavimo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} opazovanj, ki so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Matrika je zato diagonalna, po diagonali pa so variance enake:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_A}^2 &= 1,000 \times 10^{-2} \text{ m}^2 & \sigma_{x_A}^2 &= 5,625 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \sigma_{y_B}^2 &= 6,400 \times 10^{-3} \text{ m}^2 & \sigma_{x_B}^2 &= 2,500 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (1-19)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznanek \mathbf{y} .

Zanimajo nas vsi trije elementi geodetskega polarnega koordinatnega sistema, torej:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} d_{AB} \\ \nu_A^B \\ \nu_B^A \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank y .

Izhajamo iz enačb pretvorbe med geodetskim kartezičnim koordinatnim sistemom in geodetskih polarnim koordinatnim sistemom, torej:

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = 223,607 \text{ m} \\ \nu_A^B &= \arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 116^\circ 33' 54,2'' \end{aligned} \quad (1-21)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Ker imamo $n = 3$ neznanke in $n = 4$ opazovanja, je matrika \mathbf{J} dimenzije 3×4 in ima obliko (parcialne odvode izpeljite sami za vajo):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_A} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial y_B} & \frac{\partial d_{AB}}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_A^B}{\partial x_B} \\ \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_A} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial y_B} & \frac{\partial \nu_B^A}{\partial x_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,89443 & 0,44721 & 0,89443 & -0,44721 \\ 0,00200 & 0,00400 & -0,00200 & -0,00400 \\ 0,00200 & 0,00400 & -0,00200 & -0,00400 \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} (enačba (1-19)) in Jakobijevo matriko \mathbf{J} (enačba (1-22)), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank Σ_{yy} :

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy} &= \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{d_{AB}}^2 & \sigma_{d_{AB}\nu_A^B} & \sigma_{d_{AB}\nu_B^A} \\ \sigma_{d_{AB}\nu_A^B} & \sigma_{\nu_A^B}^2 & \sigma_{\nu_A^B\nu_B^A} \\ \sigma_{d_{AB}\nu_B^A} & \sigma_{\nu_A^B\nu_B^A} & \sigma_{\nu_B^A}^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1,4745 \times 10^{-2} & -1,4803 \times 10^{-5} & -1,4803 \times 10^{-5} \\ -1,4803 \times 10^{-5} & 1,9560 \times 10^{-7} & 1,9560 \times 10^{-7} \\ -1,4803 \times 10^{-5} & 1,9560 \times 10^{-7} & 1,9560 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-23)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Prvo izračunajmo natančnosti izračunanih količin:

$$\sigma_{d_{AB}} = 0,12 \text{ m} \quad \sigma_{\nu_A^B} = 91,2'' \quad \sigma_{\nu_B^A} = 91,2'' \quad (1-24)$$

V drugo pa izračunajmo še korelacije med neznankami:

$$\rho_{d_{AB}\nu_A^B} = -0,28 \quad \rho_{d_{AB}\nu_B^A} = -0,28 \quad \rho_{\nu_A^B\nu_B^A} = 1,00 \quad (1-25)$$

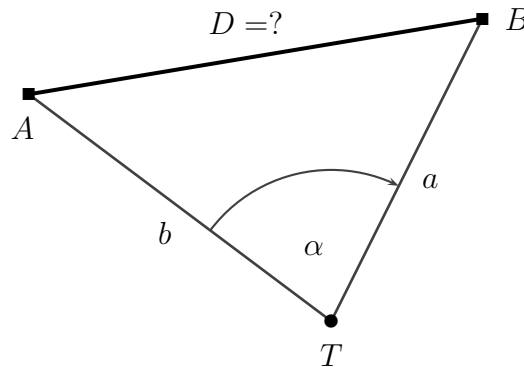
Izračunane natančnosti iz enačbe (1-24) in korelacije iz enačbe (1-25) podajajo zanimive rezultate. Vidimo, da sta natančnosti obeh kotov enaki, kota sta popolnoma korelirana ($\rho_{\nu_A^B\nu_B^A} = 1,00$), oba kota sta tudi enako korelirana z dolžino. Rezultat je seveda pričakovan. Smerna kota sta povezana z enačbo:

$$\nu_B^A = \nu_A^B + 180^\circ \quad (1-26)$$

Kar pomeni, da če se spremeni en kot, se mora za enako vrednost spremeniti tudi drug kot. Taka linearna enačba je že zadosten pogoj za popolno korelacijo.

1.7 Primer 3 – izračun dolžine med točkama

Določiti želimo dolžino D med točkama A in B in njeno natančnost σ_D . A ker je med točkama ovira, dolžine neposredno ne moremo izmeriti, zato smo stabilizirali začasno točko T , na kateri smo izmerili dve stranici (a in b) in en kot (α). Situacijo prikazuje slika 1–6. Opazovanja s pripadajočimi natančnostmi so: $a = 40,00$ m ($\sigma_a = 0,03$ m), $b = 60,00$ m ($\sigma_b = 0,05$ m) in $\alpha = 45^\circ$ ($\sigma_\alpha = 2,5'$). Izračunaj dolžino D , njeno natančnost σ_D in korelacijo dolžine D z vsemi opazovanji: ρ_{Da} , ρ_{Db} in $\rho_{D\alpha}$.



Slika 1–6: Prikaz meritev za določitev dolžine med točkama

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .

V navodilih so podana tri opazovanja, to sta stranici a in b ter kot α , saj imamo za vsa tri opazovanja podane tudi natančnosti ($n = 3$). Vektor opazovanj \mathbf{x} je velikosti 3×1 , vse dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40,00 \text{ m} \\ 60,00 \text{ m} \\ 0,7853982 \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

Sestavimo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} opazovanj. Le-ta so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Matrika je velikosti 3×3 , variance (diagonalni elementi matrike) pa imajo vrednosti:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= 9,000 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ \sigma_b^2 &= 2,500 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \sigma_\alpha^2 &= 5,289 \times 10^{-7} \end{aligned} \quad (1-28)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznanek \mathbf{y} .

V prvi vrsti nas zanima izračun dolžine D . A ker naloga zahteva tudi izračun korelacij med neznanke (D) in vsemi opazovanji (a , b in α), potem bomo vektor neznanek \mathbf{y} razširili tako, da bomo vanj dali tako neznanke D kot tudi vsa opazovanja a , b in α . Zato bo $m = 4$ in vektor \mathbf{y} bo velikosti 4×1 :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} D \\ a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank y .

Izraziti moramo, kako se dolžina D izrazi s stranicama a in b ter kotom α . S slike 1–6 vidimo, da imamo trikotnik, kjer imamo izmerjeni dve stranici in vmesni kot, računamo pa tretjo stranico. Uporabimo torej kosinusni izrek in dobimo:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} = 42,496 \text{ m} \quad (1-30)$$

Za vse ostale tri “neznanke” pa nastavimo identitete:

$$a = a \quad b = b \quad \alpha = \alpha \quad (1-31)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Izračunajmo prvo parcialne odvode neznanke D po vseh treh opazovanjih. Odvajamo enačbo (1–30) po a , b in α in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a} &= \frac{a - b \cos \alpha}{D} = -0,05710 \\ \frac{\partial D}{\partial b} &= \frac{b - a \cos \alpha}{D} = 0,74633 \\ \frac{\partial D}{\partial \alpha} &= \frac{ab \sin \alpha}{D} = 39,935 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-32)$$

Odvajati moramo tudi enačbe (1–31) po vseh treh opazovanjih. Jakobijeva matrika je velikosti 4×3 in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial a} & \frac{\partial D}{\partial b} & \frac{\partial D}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial a}{\partial b} & \frac{\partial a}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial b}{\partial a} & \frac{\partial b}{\partial b} & \frac{\partial b}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial a} & \frac{\partial \alpha}{\partial b} & \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05710 & 0,74633 & 39,93474 \\ 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad (1-33)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} (enačba (1–28)) in Jakobijevo matriko \mathbf{J} (enačba (1–33)), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank Σ_{yy} :

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy} &= \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & \sigma_{Da} & \sigma_{Db} & \sigma_{D\alpha} \\ \sigma_{Da} & \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ \sigma_{Db} & 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ \sigma_{D\alpha} & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2,2388 \times 10^{-3} & -5,1388 \times 10^{-5} & 1,8658 \times 10^{-3} & 2,1119 \times 10^{-5} \\ -5,1388 \times 10^{-5} & 9,0000 \times 10^{-4} & 0,0000 & 0,0000 \\ 1,8658 \times 10^{-3} & 0,0000 & 2,5000 \times 10^{-3} & 0,0000 \\ 2,1119 \times 10^{-5} & 0,0000 & 0,0000 & 5,2885 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-34)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Prvo izračunajmo natančnost σ_D izračunane dolžine D . Dobimo:

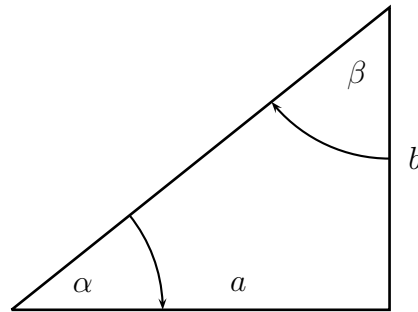
$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_D^2} = 0,047 \text{ m} \quad (1-35)$$

Iz prve vrstice kovariančne matrike neznank Σ_{yy} v enačbi (1-34) pa izračunajmo še vse tri korelacije neznanke z opazovanji, torej:

$$\begin{aligned} \rho_{Da} &= \frac{\sigma_{Da}}{\sigma_D \sigma_a} = -0,04 \\ \rho_{Db} &= \frac{\sigma_{Db}}{\sigma_D \sigma_b} = 0,79 \\ \rho_{D\alpha} &= \frac{\sigma_{D\alpha}}{\sigma_D \sigma_\alpha} = 0,61 \end{aligned} \quad (1-36)$$

1.8 Primer 4 – parcela pravokotne oblike, merjeni stranici

Parcela ima obliko pravokotnega trikotnika, kot to prikazuje slika 1–7. Z razdaljemerom, ki ima podano natančnost izmerjenih dolžin kot $\sigma_d = 1,0 \text{ cm}/10 \text{ m}$ smo izmerili stranici $a = 61,090 \text{ m}$ in $b = 50,170 \text{ m}$. Izračunajte oba notranja kota α in β , njuni natančnosti σ_α in σ_β ter njuno korelacijo $\rho_{\alpha\beta}$. Primerjaj rezultate z enako nalogo lanskega leta, pri poglavju Prenos pravih pogreškov.



Slika 1–7: Skica opazovanj v parceli oblike pravokotnega trikotnika

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .

Izmerjeni imamo dve stranici, a in b , zato je $n = 2$. Vektor opazovanj \mathbf{x} je velikosti 2×1 in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61,090 \text{ m} \\ 50,170 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-37)$$

Da sestavimo kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} moramo prvo izračunati natančnosti obeh opazovanj. Velja:

$$\sigma_a = a \cdot \sigma_d = 0,061 \text{ m} \quad \sigma_b = b \cdot \sigma_d = 0,050 \text{ m} \quad (1-38)$$

Na osnovi izračunanih standardnih odklonov iz enačbe (1–38) sestavimo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} , ki je velikosti 2×2 , in ima obliko:

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,732 \times 10^{-3} \text{ m}^2 & 0 \\ 0 & 2,517 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \end{bmatrix} \quad (1-39)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank \mathbf{y} .

Glede na navodilo naloge, nas zanimata oba notranja kota, to sta α in β , zato je $m = 2$ in vektor \mathbf{y} velikosti 2×1 :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (1-40)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank \mathbf{y} .

Izračun obeh neznank izhaja iz osnovnih definicij kotnih funkcij v pravokotnem trikotniku. Velja:

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a} = 39^\circ 23' 40'' \quad \beta = \arctan \frac{a}{b} = 50^\circ 36' 20'' \quad (1-41)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Izračunamo vse parcialne odvode in sestavimo matriko \mathbf{J} . Le-ta je velikosti 2×2 in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial a} & \frac{\partial \alpha}{\partial b} \\ \frac{\partial \beta}{\partial a} & \frac{\partial \beta}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{-a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,028 \times 10^{-3} & 9,776 \times 10^{-3} \\ 8,028 \times 10^{-3} & -9,776 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (1-42)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} (enačba (1-39)) in Jakobijevo matriko \mathbf{J} (enačba (1-42)), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank Σ_{yy} :

$$\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,811 \times 10^{-7} & -4,811 \times 10^{-7} \\ -4,811 \times 10^{-7} & 4,811 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \quad (1-43)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Natančnosti obeh kotov sta:

$$\sigma_\alpha = 143'' \quad \sigma_\beta = 143'' \quad (1-44)$$

Korelacija med obema kotoma $\rho_{\alpha\beta}$ pa je enaka:

$$\rho_{\alpha\beta} = -1,00 \quad (1-45)$$

Kakšna pa je primerjava rezultatov iz enačb (1-44) in (1-45) z rezultati naloge pri prenosu varianc in kovarianc? V primeru prenosa pravih pogreškov (glej poglavje *Zakon o prenosu pravih pogreškov* prejšnjega leta) smo ugotovili, da lahko obstaja situacija ob ustrezni geometriji problema in velikosti pravih pogreškov opazovanj, ko bo izračun neznank neodvisen od pogreškov v opazovanjih. Tam sta bila prava pogreška obeh kotov ($\Delta\alpha$ in $\Delta\beta$) enaka nič, saj so bili pravi pogreški dolžin taki, da se je ohranjala oblika trikotnika. V primeru zakona o prenosu varianc in kovarianc, pa take situacije, ko opazovanja niso korelirana, ni več, saj ne gledamo več na posamezne pogreške ampak na statistične lastnosti pogreškov.

1.9 Primer 5 – slepi poligon treh novih točk

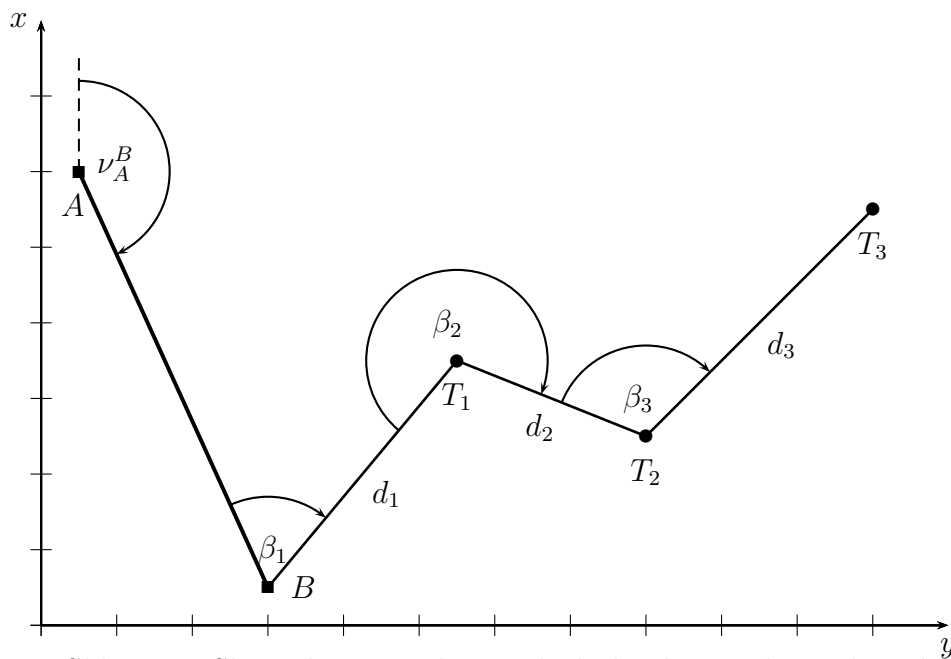
Določiti želimo koordinate treh novih točk (T_1 , T_2 in T_3) na osnovi dveh danih točk (A in B) ter opazovanj slepega poligona (d_1 , β_1 , d_2 , β_2 , d_3 in β_3), kot to prikazuje slika 1–8. Dane koordinate točk A in B sta:

- $A(y_A, x_A) = (461\,300,0\text{ m}, 100\,600,0\text{ m})$ in
- $B(y_B, x_B) = (461\,400,0\text{ m}, 100\,550,0\text{ m})$.

Opazovanja v slepem poligonu so enaka:

- $d_1 = 75,0\text{ m}$, $\beta_1 = 100^\circ$,
- $d_2 = 50,0\text{ m}$, $\beta_2 = 230^\circ$ in
- $d_3 = 100,0\text{ m}$, $\beta_3 = 75^\circ$.

Če je natančnost vseh dolžin enaka $\sigma_d = 5,0\text{ cm}$ in je enaka tudi natančnost vseh kotov $\sigma_\beta = 2'$, izračunaj koordinate točk $T_1(y_1, x_1)$, $T_2(y_2, x_2)$ in $T_3(y_3, x_3)$. S prenosom varianc in kovarianc izračunaj tudi natančnosti vseh koordinat in vse korelacije med vsemi koordinatami.



Slika 1–8: Skica slepega poligona dveh danih in treh novih točk

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .

Število opazovanj je 6, ki jih razvrstimo kot:

$$\mathbf{x} = [d_1 \quad \beta_1 \quad d_2 \quad \beta_2 \quad d_3 \quad \beta_3]^T \quad (1-46)$$

V vektorju \mathbf{x} iz enačbe (1–46) so dolžinske količine v metrih, kotne količine pa v radianih. Variančno-kovariančna matrika je velikosti 6×6 , diagonalna, kjer so na diagonali elementi:

$$\Sigma_D = [\sigma_d^2 \quad \sigma_\beta^2 \quad \sigma_d^2 \quad \sigma_\beta^2 \quad \sigma_d^2 \quad \sigma_\beta^2] \quad (1-47)$$

Vrednost varianc iz enačbe (1–47) sta $\sigma_d^2 = 0,0025\text{ m}^2$ in $\sigma_\beta^2 = 3,385 \times 10^{-7}$.

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznanek \mathbf{y} .

Določiti želimo koordinate treh točk novih točk ($T_1(y_1, x_1)$, $T_2(y_2, x_2)$ in $T_3(y_3, x_3)$), torej je $m = 6$ in velja:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & x_1 & y_2 & x_2 & y_3 & x_3 \end{bmatrix}^T \quad (1-48)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznančkami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznanek \mathbf{y} .

Uporabimo enačbe za izračun točk v slepem poligonu. Velja:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_B + d_1 \sin(\nu_B^{T_1}) = 461\,444,680 \text{ m} \\ x_1 &= x_B + d_1 \cos(\nu_B^{T_1}) = 100\,610,239 \text{ m} \\ y_2 &= y_B + d_1 \sin(\nu_B^{T_1}) + d_2 \sin(\nu_{T_1}^{T_2}) = 461\,494,590 \text{ m} \\ x_2 &= x_B + d_1 \cos(\nu_B^{T_1}) + d_2 \cos(\nu_{T_1}^{T_2}) = 100\,613,234 \text{ m} \\ y_3 &= y_B + d_1 \sin(\nu_B^{T_1}) + d_2 \sin(\nu_{T_1}^{T_2}) + d_3 \sin(\nu_{T_2}^{T_3}) = 461\,462,968 \text{ m} \\ x_3 &= x_B + d_1 \cos(\nu_B^{T_1}) + d_2 \cos(\nu_{T_1}^{T_2}) + d_3 \cos(\nu_{T_2}^{T_3}) = 100\,708,103 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-49)$$

V enačbi (1-49) smerne kote med točkami ($\nu_B^{T_1}$, $\nu_{T_1}^{T_2}$ in $\nu_{T_2}^{T_3}$) izračunamo kot:

$$\begin{aligned} \nu_B^{T_1} &= \nu_A^B + \beta_1 - 180^\circ = 36^\circ 33' 54'' \\ \nu_{T_1}^{T_2} &= \nu_A^B + \beta_1 + \beta_2 - 2 \cdot 180^\circ = 86^\circ 33' 54'' \\ \nu_{T_2}^{T_3} &= \nu_A^B + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3 \cdot 180^\circ = 341^\circ 33' 54'' \end{aligned} \quad (1-50)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Izračunati moramo vse parcialne odvode, vseh 6 neznanek moramo odvajati o vseh 6-ih opazovanjih. Imamo torej 36 parcialnih odvodov, ki pa imajo obliko:

- parcialni odvodi y_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial d_1} &= \sin(\nu_B^{T_1}) & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_1} &= d_1 \cos(\nu_B^{T_1}) \\ \frac{\partial y_1}{\partial d_2} &= 0 & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_2} &= 0 \\ \frac{\partial y_1}{\partial d_3} &= 0 & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_3} &= 0 \end{aligned} \quad (1-51)$$

- parcialni odvodi x_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial d_1} &= \cos(\nu_B^{T_1}) & \frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} &= -d_1 \sin(\nu_B^{T_1}) \\ \frac{\partial x_1}{\partial d_2} &= 0 & \frac{\partial x_1}{\partial \beta_2} &= 0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial d_3} &= 0 & \frac{\partial x_1}{\partial \beta_3} &= 0 \end{aligned} \quad (1-52)$$

- parcialni odvodi y_2 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_2}{\partial d_1} &= \sin(\nu_B^{T_1}) & \frac{\partial y_2}{\partial \beta_1} &= d_1 \cos(\nu_B^{T_1}) + d_2 \cos(\nu_{T_1}^{T_2}) \\ \frac{\partial y_2}{\partial d_2} &= \sin(\nu_{T_1}^{T_2}) & \frac{\partial y_2}{\partial \beta_2} &= d_2 \cos(\nu_{T_1}^{T_2}) \\ \frac{\partial y_2}{\partial d_3} &= 0 & \frac{\partial y_2}{\partial \beta_3} &= 0\end{aligned}\tag{1-53}$$

- parcialni odvodi x_2 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2}{\partial d_1} &= \cos(\nu_B^{T_1}) & \frac{\partial x_2}{\partial \beta_1} &= -d_1 \sin(\nu_B^{T_1}) - d_2 \sin(\nu_{T_1}^{T_2}) \\ \frac{\partial x_2}{\partial d_2} &= \cos(\nu_{T_1}^{T_2}) & \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2} &= -d_2 \sin(\nu_{T_1}^{T_2}) \\ \frac{\partial x_2}{\partial d_3} &= 0 & \frac{\partial x_2}{\partial \beta_3} &= 0\end{aligned}\tag{1-54}$$

- parcialni odvodi y_3 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_3}{\partial d_1} &= \sin(\nu_B^{T_1}) & \frac{\partial y_3}{\partial \beta_1} &= d_1 \cos(\nu_B^{T_1}) + d_2 \cos(\nu_{T_1}^{T_2}) + d_3 \cos(\nu_{T_2}^{T_3}) \\ \frac{\partial y_3}{\partial d_2} &= \sin(\nu_{T_1}^{T_2}) & \frac{\partial y_3}{\partial \beta_2} &= d_2 \cos(\nu_{T_1}^{T_2}) + d_3 \cos(\nu_{T_2}^{T_3}) \\ \frac{\partial y_3}{\partial d_3} &= \sin(\nu_{T_2}^{T_3}) & \frac{\partial y_3}{\partial \beta_3} &= d_3 \cos(\nu_{T_2}^{T_3})\end{aligned}\tag{1-55}$$

- parcialni odvodi x_3 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_3}{\partial d_1} &= \cos(\nu_B^{T_1}) & \frac{\partial x_3}{\partial \beta_1} &= -d_1 \sin(\nu_B^{T_1}) - d_2 \sin(\nu_{T_1}^{T_2}) - d_3 \sin(\nu_{T_2}^{T_3}) \\ \frac{\partial x_3}{\partial d_2} &= \cos(\nu_{T_1}^{T_2}) & \frac{\partial x_3}{\partial \beta_2} &= -d_2 \sin(\nu_{T_1}^{T_2}) - d_3 \sin(\nu_{T_2}^{T_3}) \\ \frac{\partial x_3}{\partial d_3} &= \cos(\nu_{T_2}^{T_3}) & \frac{\partial x_3}{\partial \beta_3} &= -d_3 \sin(\nu_{T_2}^{T_3})\end{aligned}\tag{1-56}$$

Zgornje parcialne odvode vstavimo v Jakobijevo matriko \mathbf{J} in dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial d_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial y_1}{\partial d_2} & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial y_1}{\partial d_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial d_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial d_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial d_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial d_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial y_2}{\partial d_2} & \frac{\partial y_2}{\partial \beta_2} & \frac{\partial y_2}{\partial d_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial d_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial d_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial d_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial d_1} & \frac{\partial y_3}{\partial \beta_1} & \frac{\partial y_3}{\partial d_2} & \frac{\partial y_3}{\partial \beta_2} & \frac{\partial y_3}{\partial d_1} & \frac{\partial y_3}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial d_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \beta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial d_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \beta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial d_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \beta_3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,596 & 60,239 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,803 & -44,680 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,596 & 63,234 & 0,998 & 2,996 & 0,000 & 0,000 \\ 0,803 & -94,590 & 0,060 & -49,910 & 0,000 & 0,000 \\ 0,596 & 158,103 & 0,998 & 97,864 & -0,316 & 94,868 \\ 0,803 & -62,968 & 0,060 & -18,287 & 0,949 & 31,623 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1-57}$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Izračun variančno-kovariančne matrike Σ_{yy} sledi po sestavi variančno-kovariančne matrike Σ_{xx} in Jakobijeve matrike \mathbf{J} , izpis matrike pa bomo tu, zaradi velikosti matrike, izpustili. Vsi rezultati so podani v nadaljevanju.

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Izračunana natančnost koordinat za vsako točko in pripadajoča korelacija so:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1} &= 0,046 \text{ m} & \sigma_{x_1} &= 0,048 \text{ m} & \rho_{y_1x_1} &= 0,130 \\ \sigma_{y_2} &= 0,069 \text{ m} & \sigma_{x_2} &= 0,074 \text{ m} & \rho_{y_2x_2} &= -0,143 \\ \sigma_{y_3} &= 0,136 \text{ m} & \sigma_{x_3} &= 0,075 \text{ m} & \rho_{y_3x_3} &= -0,232 \end{aligned} \quad (1-58)$$

Vse ostale korelacije lahko zapišemo v pregledni obliki:

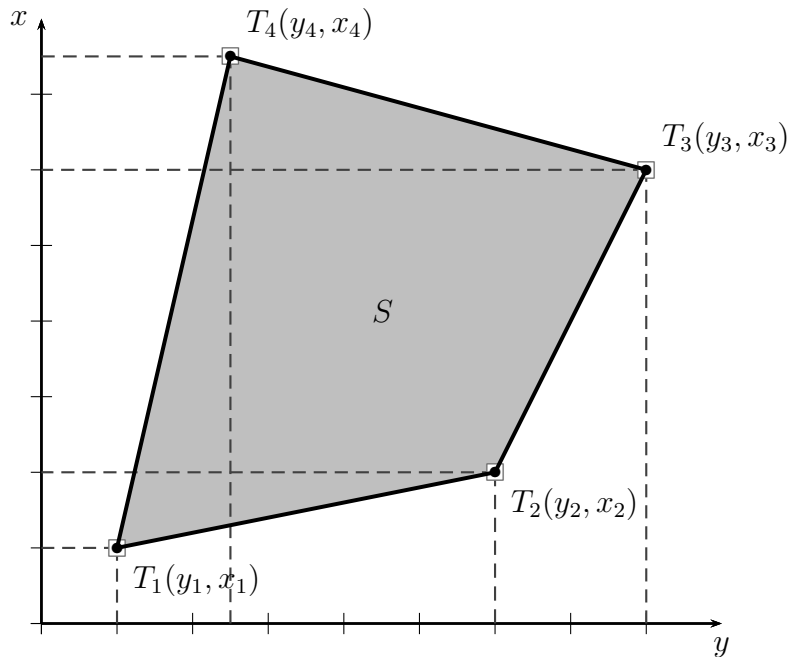
	y_1	x_1	y_2	x_2	y_3	x_3
y_1	1,00					
x_1	0,13	1,00				
y_2	0,69	0,07	1,00			
x_2	-0,21	0,86	-0,14	1,00		
y_3	0,66	-0,18	0,74	-0,53	1,00	
x_3	-0,03	0,71	0,00	0,71	-0,23	1,00

Korelacije v zgornji preglednici so podane za vse možne kombinacije neznank. V sivem so korelacije neznanke s samimi seboj, zato vedno vrednost 1. Modre so korelacije med koordinatama iste točke.

Rezultati prikazanega primera prikazujejo osnovno lastnost slepega poligona. Kot prvo, iz matematičnega modela (enačbi (1-49) in (1-50)) lahko razberemo, kako so koordinate posamezne točke odvisne od opazovanj. Da izračunamo koordinate i -te točke, moramo uporabiti koordinate obeh danih točk in vsa opazovanja do te, i -te točke. Posledično, natančnost koordinat točk v slepem poligonu pada z "oddaljevanjem" od začetnih (danih) točk, kjer si kot oddaljenost tu predstavljamo število vmesnih točk od dane točke do i -te točke. Standardni odkloni se z oddaljevanjem od danih točk večajo, kakovost je vedno slabša. V praksi bi zato morali biti zelo previdni pri uporabi slepega poligona, zato, če je le možno, naj se poligon zaključi na dani točki.

1.10 Primer 6 – površina zaključenega poligona

Določiti želimo površino parcele S , kjer smo z geodetskimi metodami določili koordinate štirih točk, kot to prikazuje slika 1–9. Koordinate točk so $T_1(y_1, x_1) = (10 \text{ m}, 10 \text{ m})$, $T_2(y_2, x_2) = (60 \text{ m}, 20 \text{ m})$, $T_3(y_3, x_3) = (80 \text{ m}, 60 \text{ m})$ in $T_4(y_4, x_4) = (25 \text{ m}, 75 \text{ m})$, podane pa imamo tudi natančnosti vseh koordinat, in sicer $\sigma_{y_1} = 0,010 \text{ m}$, $\sigma_{x_1} = 0,020 \text{ m}$, $\sigma_{y_2} = 0,015 \text{ m}$, $\sigma_{x_2} = 0,020 \text{ m}$, $\sigma_{y_3} = 0,005 \text{ m}$, $\sigma_{x_3} = 0,005 \text{ m}$, $\sigma_{y_4} = 0,020 \text{ m}$, $\sigma_{x_4} = 0,010 \text{ m}$. Izračunaj površino parcele S , njeno natančnost σ_S in korelacije površine parcele z vsemi opazovanji $(\rho_{Sy_1}, \dots, \rho_{Sx_4})$.



Slika 1–9: Določitev površine iz koordinat točk poligona

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .

Računamo površino S iz koordinat štirih točk, torej $n = 8$. Vektor opazovanj \mathbf{x} ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ y_2 \\ x_2 \\ y_3 \\ x_3 \\ y_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,0 \text{ m} \\ 10,0 \text{ m} \\ 60,0 \text{ m} \\ 20,0 \text{ m} \\ 80,0 \text{ m} \\ 60,0 \text{ m} \\ 25,0 \text{ m} \\ 75,0 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-59)$$

Variance opazovanj, ki sestavljajo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} velikosti 8×8 , so:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1}^2 &= 0,000100 \text{ m}^2 & \sigma_{x_1}^2 &= 0,000400 \text{ m}^2 \\ \sigma_{y_2}^2 &= 0,000225 \text{ m}^2 & \sigma_{x_2}^2 &= 0,000400 \text{ m}^2 \\ \sigma_{y_3}^2 &= 0,000025 \text{ m}^2 & \sigma_{x_3}^2 &= 0,000025 \text{ m}^2 \\ \sigma_{y_4}^2 &= 0,000400 \text{ m}^2 & \sigma_{x_4}^2 &= 0,000100 \text{ m}^2 \end{aligned} \quad (1-60)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznanek \mathbf{y} .

Ker računamo površino parcele (poligona) S , je zato število neznanek enako $m = 1$. Vektor neznanek \mathbf{y} je podan z:

$$\mathbf{y} = [S] \quad (1-61)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank \mathbf{y} .

Površina zaključenega poligona na osnovi koordinat točk poligona se za podan primer izračuna kot:

$$S = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(y_2 - y_3)(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(y_3 - y_4)(x_3 + x_4) + \frac{1}{2}(y_4 - y_1)(x_4 + x_1) \quad (1-62)$$

Za izračun površine S iz enačbe (1-62) uporabimo numerične vrednosti opazovanj iz enačbe (1-59) in dobimo:

$$S = 2\,800,00 \text{ m}^2 \quad (1-63)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Parcialni odvodi enačbe (1-62) po vseh koordinatah (opazovanjih) imajo, po krajši matematični akrobaciji, obliko:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial y_1} &= \frac{x_2 - x_4}{2} = -27,50 \text{ m} & \frac{\partial S}{\partial x_1} &= -\frac{y_2 - y_4}{2} = -17,50 \text{ m} \\ \frac{\partial S}{\partial y_2} &= \frac{x_3 - x_1}{2} = 25,00 \text{ m} & \frac{\partial S}{\partial x_2} &= -\frac{y_3 - y_1}{2} = -35,00 \text{ m} \\ \frac{\partial S}{\partial y_3} &= \frac{x_4 - x_2}{2} = 27,50 \text{ m} & \frac{\partial S}{\partial x_3} &= -\frac{y_4 - y_2}{2} = 17,50 \text{ m} \\ \frac{\partial S}{\partial y_4} &= \frac{x_1 - x_3}{2} = -25,00 \text{ m} & \frac{\partial S}{\partial x_4} &= -\frac{y_1 - y_3}{2} = 35,00 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-64)$$

Matrika \mathbf{J} je velikosti $m \times n = 1 \times 8$ in ima obliko:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial y_1} & \frac{\partial S}{\partial x_1} & \frac{\partial S}{\partial y_2} & \frac{\partial S}{\partial x_2} & \frac{\partial S}{\partial y_3} & \frac{\partial S}{\partial x_3} & \frac{\partial S}{\partial y_4} & \frac{\partial S}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27,50 \text{ m} & -17,50 \text{ m} & 25,00 \text{ m} & -35,00 \text{ m} & 27,50 \text{ m} & 17,50 \text{ m} & -25,00 \text{ m} & 35,00 \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1-65)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Ko imamo sestavljeno kovariančno matriko opazovanj Σ_{xx} (iz enačbe (1-60)) in Jakobijevo matriko \mathbf{J} (enačba (1-65)), lahko izračunamo kovariančno matriko neznank Σ_{yy} :

$$\Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma_S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2278 \text{ m}^4 \end{bmatrix} \quad (1-66)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Natančnost površine S je torej:

$$\sigma_S = 1,11 \text{ m}^2 \quad (1-67)$$

7. Izračun korelacije neznanke S z vsemi opazovanji iz vektorja \mathbf{x} .

Za izračun korelacije med neznankami in opazovanji moramo razširiti vektor neznank \mathbf{y} (glej pod-poglavje 1.2) tako, da bo enak:

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} S \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (1-68)$$

Izračunajmo sedaj razširjeno jakobijevo matriko $\bar{\mathbf{J}}$, ki ima obliko:

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1-69)$$

Variančno kovariančna matrika $\Sigma_{\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}}}$ ima obliko:

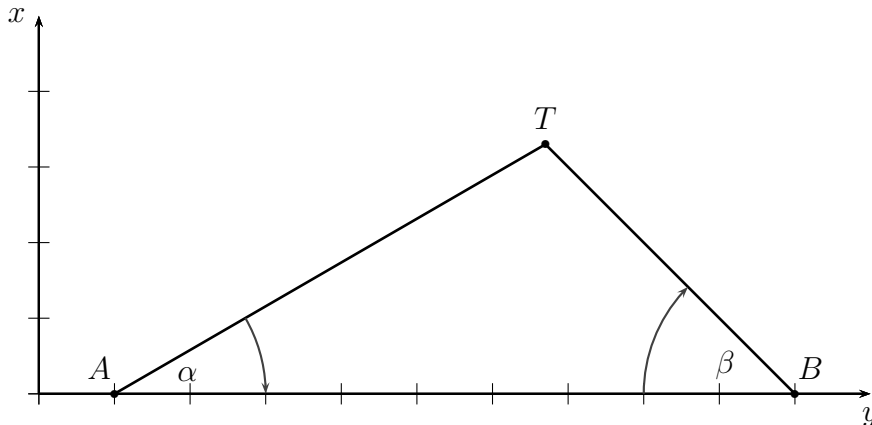
$$\Sigma_{\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}}} = \bar{\mathbf{J}}\Sigma_{xx}\bar{\mathbf{J}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Sigma_{xx} \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T & \mathbf{J}\Sigma_{xx} \\ \Sigma_{xx}\mathbf{J}^T & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} \quad (1-70)$$

Korelacije med neznankami in opazovanji pridobimo iz matrike Σ_{yx} , numerično pa velja:

$$\begin{aligned} \rho_{Sy_1} &= -0,25 & \rho_{Sx_1} &= -0,32 \\ \rho_{Sy_2} &= 0,34 & \rho_{Sx_2} &= -0,63 \\ \rho_{Sy_3} &= 0,12 & \rho_{Sx_3} &= 0,08 \\ \rho_{Sy_4} &= -0,45 & \rho_{Sx_4} &= 0,32 \end{aligned} \quad (1-71)$$

1.11 Primer 7 – zunanji urez

Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10 \text{ m}, 0 \text{ m})$ in $B(y_B, x_B) = (100 \text{ m}, 0 \text{ m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva kota, in sicer $\alpha = 30^\circ$ in $\beta = 45^\circ$, oba z natančnostjo ($\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1'$), kot to prikazuje slika 1–10. Izračunajte koordinate točke T , kovariančno matriko Σ_T položaja točke T , natančnosti obeh koordinat σ_{y_T} , σ_{x_T} in njuno korelacijo $\rho_{y_T x_T}$.



Slika 1–10: Opazovanja zunanjega ureza za določitev koordinat nove točke

Izračun koordinat pri zunanjem urezu smo detajlno prikazali v prejšnjem letu pri poglavju *Zakon o prenosu pravih pogreškov*, zato bomo tu vse izpeljave izpistili, bomo pa zapisali vse enačbe in vse rezultate.

1. Sestavimo vektor opazovanj \mathbf{x} in pripadajočo variančno-kovariančno matriko Σ_{xx} .

Velikost vektorja opazovanj \mathbf{x} in kovariančne matrike Σ_{xx} določa število opazovanj, ki je v tem primeru enako $n = 2$. V vektor opazovanj damo vsa opazovanja, a ker so vsa d kotne količine, jih pretvorimo v radiane. Dobimo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,523599 \\ 0,785398 \end{bmatrix} \quad (1-72)$$

Tudi v kovariančno matriko damo natančnosti opazovanj, ki jih pretvorimo v radiane in, seveda, kvadriramo, saj gredo na diagonalna mesta variance opazovanj. Izven-diagonalni elementi so enaki 0, saj nimamo podatka o korelaciji med opazovanjema. Kovariančna matrika Σ_{xx} ima obliko:

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} 8,462 \times 10^{-8} & 0 \\ 0 & 8,462 \times 10^{-8} \end{bmatrix} \quad (1-73)$$

2. Določimo vse naše neznanke y_j ($j = 1, \dots, m$) in sestavimo vektor neznank \mathbf{y} .

Zanimajo nas koordinate točke T , torej je $m = 2$, vektor neznank \mathbf{y} pa ima obliko:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \quad (1-74)$$

3. Določimo funkcijske zveze med neznankami in opazovanji, $y_j = f_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ($j = 1, \dots, m$) in izračunamo vrednosti neznank \mathbf{y} .

Za izračun koordinat točke T moramo prvo izračunati stranico a , stranico med točkama A in T , ki jo dobimo na osnovi sinusnega izreka v trikotniku:

$$a = d_{AB} \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 65,885 \text{ m} \quad (1-75)$$

Koordinate točke T izračunamo tako, da izhajamo s točke A , uporabimo stranico a (enačba (1-75)) in kot α . Velja:

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + a \cos \alpha = d_{AB} \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 67,058 \text{ m} \\ x_T &= x_A + a \sin \alpha = d_{AB} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = 32,942 \text{ m} \end{aligned} \quad (1-76)$$

4. Izračunamo vseh $m \times n$ parcialnih odvodov $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ in sestavimo Jakobijevo matriko \mathbf{J} velikosti $m \times n$.

Izračunamo vse parcialne odvode, vseh neznank po vseh opazovanjih. Dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_T}{\partial \alpha} &= \frac{-d_{AB}}{2} \frac{\sin 2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} & \frac{\partial y_T}{\partial \beta} &= \frac{d_{AB}}{2} \frac{\sin 2\alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \\ \frac{\partial x_T}{\partial \alpha} &= d_{AB} \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} & \frac{\partial x_T}{\partial \beta} &= d_{AB} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (1-77)$$

Jakobijeva matrika \mathbf{J} je enaka:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_T}{\partial \alpha} & \frac{\partial y_T}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x_T}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_T}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48,23085 & 41,76915 \\ 48,23085 & 24,11543 \end{bmatrix} \quad (1-78)$$

5. Izračunamo kovariančno matriko neznank $\Sigma_{yy} = \mathbf{J}\Sigma_{xx}\mathbf{J}^T$.

Kovariančno matriko Σ_{yy} , ki predstavlja kovariančno matriko točke T , izračunamo na osnovi Jakobijeve matrike \mathbf{J} iz enačbe (1-78) in kovariančne matrike opazovanj Σ_{xx} iz enačbe (1-73), in dobimo:

$$\Sigma_{yy} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_T}^2 & \sigma_{y_T x_T} \\ \sigma_{y_T x_T} & \sigma_{x_T}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,445 \times 10^{-4} & -1,116 \times 10^{-4} \\ -1,116 \times 10^{-4} & 2,460 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2 \quad (1-79)$$

6. Iz variančno-kovariančne matrike neznank Σ_{yy} izračunamo natančnosti neznank σ_j ($j = 1, \dots, m$) in korelacije med neznankami $\rho_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, m \wedge i \neq j$).

Izračunamo natančnosti koordinat σ_{y_T} in σ_{x_T} ter korelacijo $\rho_{y_T x_T}$:

$$\sigma_{y_T} = 1,86 \text{ cm} \quad \sigma_{x_T} = 1,57 \text{ cm} \quad \rho_{y_T x_T} = -0,38 \quad (1-80)$$