Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Geodezija in geoinformatika, 1. letnik

IZRAVNALNI RAČUN 1 - VAJE
Dodatne naloge izravnave po MNK

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

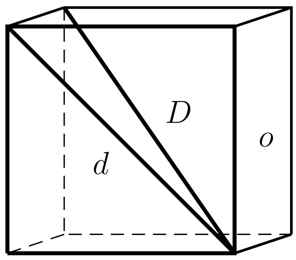
Kazalo vsebine

Kazalo slik

Kazalo preglednic

1 Dodatni primeri izravnave

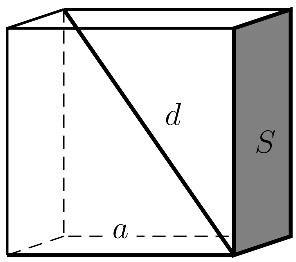
1. V kocki smo izmerili tri količine, in sicer: ploskovno diagonalo ($d = 14.0\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo ($D = 17.0\,\mathrm{m}$) in obseg osnovne ploskve ($o = 40.0\,\mathrm{m}$). S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja, če sta obe diagonali (d in D) korelirani, saj velja $\rho_{dD} = -0.5$. Izračunaj velikost osnovne ploskve a in njeno natančnost σ_a. Izračunaj tudi prostornino kocke V in njeno natančnost σ_V.



Slika 1–1: Naloga 1

REŠITEV: $a = 9.943\,\mathrm{m}$, $v_d = 6.2\,\mathrm{cm}$, $v_D = 22.2\,\mathrm{cm}$, $v_o = -22.7\,\mathrm{cm}$, $V = 983.03\,\mathrm{m}^3$.

2. V kocki smo opazovali: stranico $a = 10.1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0.1\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo $d = 17.4\,\mathrm{m}$ ($\sigma_d = 0.15\,\mathrm{m}$) in površino osnovne ploskve $S = 99.5\,\mathrm{m}^2$ ($\sigma_S = 0.7\,\mathrm{m}^2$). Izravnajte opazovanja in določite velikost kocke.



Slika 1–2: Naloga 2

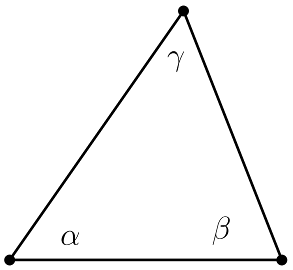
REŠITEV: $\hat{a} = 9.996\,\mathrm{m}$, $\hat{d} = 17.314\,\mathrm{m}$, $\hat{S} = 99.913\,\mathrm{m}^2$.

3. V trikotniku smo izmerili vse tri kote in dobili $\alpha = 64°33'$, $\beta = 60°30'$ in $\gamma = 55°0'$. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_\alpha = 1'$, $\sigma_\beta = 2'$ in $\sigma_\gamma = 2'$), izravnaj opazovanja po MNK.

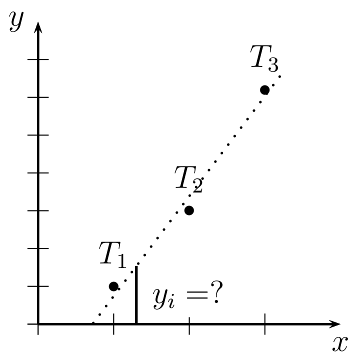
   REŠITEV: $\hat{\alpha} = 64°32'40''$, $\hat{\beta} = 60°28'40''$, $\hat{\gamma} = 54°58'40''$.

4. V ravnini smo trem točkam izmerili koordinate y (koordinate x so dane) in dobili: $T_1(x_1, y_1) = (1.0, 1.0)$, $T_2(x_2, y_2) = (2.0, 3.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (3.0, 5.1)$. Če so opazovanja enake natančnosti, s posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice (parametra a in b), ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj, kakšna je vrednost koordinate y_i pri vrednosti koordinate $x_i = 1.3$.

   REŠITEV: $a = 2.05$, $b = -1.067$, $\hat{y}_1 = 0.983$, $\hat{y}_2 = 3.033$, $\hat{y}_3 = 5.083$, $y_i = 1.5983$.

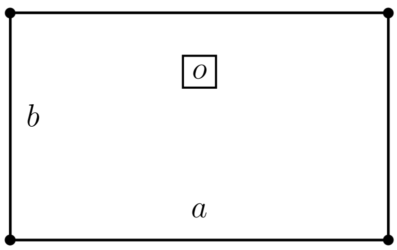


Slika 1–3: Naloga 3



Slika 1–4: Naloga 4

5. Pri pravokotniku smo izmerili obe stranici: $a = 12.4\,\mathrm{m}$ in $b = 7.5\,\mathrm{m}$ ter obseg $o = 40.0\,\mathrm{m}$. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_a = \sigma_b = 1\,\mathrm{dm}$, $\sigma_o = 2\,\mathrm{dm}$) in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in izračunaj površino pravokotnika.



Slika 1–5: Naloga 5

REŠITEV: $v_a = v_b = 3.33\,\mathrm{cm}$, $v_o = -6.67\,\mathrm{cm}$, $S = 93.664\,\mathrm{m}^2$.

6. Nalogo 4 reši tako, da predpostaviš, da je prosti člen $b = -1.0$.

   REŠITEV: $a = 2.02$, $\hat{y}_1 = 1.021$, $\hat{y}_2 = 3.043$, $\hat{y}_3 = 5.064$, $y_i = 1.628$.

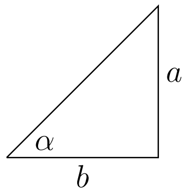
7. Nalogo 4 reši tako, da so opazovane koordinate x, medtem ko so koordinate y dane. Kako bi to nalogo lahko rešili najbolj enostavno?

   REŠITEV: $a = 2.05$, $b = -1.067$, $\hat{x}_1 = 1.008$, $\hat{x}_2 = 1.984$, $\hat{x}_3 = 3.008$, $y_i = 1.598$.

8. V krogli smo izmerili polmer $R = 3.65\,\mathrm{m}$ ($\sigma_R = 3\,\mathrm{cm}$), premer $D = 7.1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_D = 3\,\mathrm{cm}$), površino $A = 158.4\,\mathrm{m}^2$ ($\sigma_A = 0.12\,\mathrm{m}^2$) in prostornino $V = 187.5\,\mathrm{m}^3$ ($\sigma_V = 0.15\,\mathrm{m}^3$). Izravnajte opazovanja s posredno in pogojno izravnavo po MNK.

   REŠITEV: $\hat{R} = 3.5528\,\mathrm{m}$, $\hat{D} = 7.1057\,\mathrm{m}$, $\hat{A} = 158.5034\,\mathrm{m}^2$, $\hat{V} = 187.4243\,\mathrm{m}^3$.

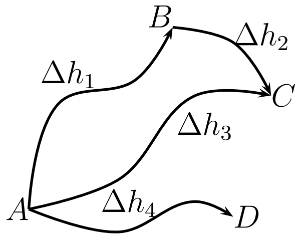
9. V pravokotnem trikotniku smo izmerili: $a = 10.0\,\mathrm{m}$, $b = 15.0\,\mathrm{m}$, in $\alpha = 30°$. Če so natančnosti opazovanj dane kot $\sigma_a = 1\,\mathrm{cm}$, $\sigma_b = 2\,\mathrm{cm}$ in $\sigma_\alpha = 30'$, izravnaj opazovanja in določi površino trikotnika S.



Slika 1–6: Naloga 9

REŠITEV: $v_a = -0.44\,\mathrm{cm}$, $v_b = 1.01\,\mathrm{cm}$, $v_\alpha = 3.81°$, $S = 75.018\,\mathrm{m}^2$.

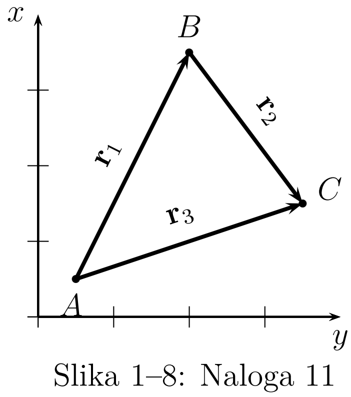
10. V lokalni višinski geodetski mreži ima reper A dano višino $H_A = 10.0\,\mathrm{m}$. Izmerili smo 4 višinske razlike s pripadajočimi dolžinami nivelmanskih linij: $\Delta h_1 = -1.01\,\mathrm{m}$ ($d_1 = 50\,\mathrm{m}$), $\Delta h_2 = 0.73\,\mathrm{m}$ ($d_2 = 20\,\mathrm{m}$), $\Delta h_3 = -0.25\,\mathrm{m}$ ($d_3 = 50\,\mathrm{m}$) in $\Delta h_4 = 0.12\,\mathrm{m}$ ($d_4 = 50\,\mathrm{m}$). Izravnaj opazovanja in določi višine reperjev B, C in D.



Slika 1–7: Naloga 10

REŠITEV: $v_1 = 1.25\,\mathrm{cm}$, $v_b = 0.50\,\mathrm{cm}$, $v_3 = -1.25\,\mathrm{cm}$, $v_4 = 0.0\,\mathrm{cm}$, $H_B = 9.0025\,\mathrm{m}$, $H_C = 9.7375\,\mathrm{m}$, $H_D = 10.12\,\mathrm{m}$.

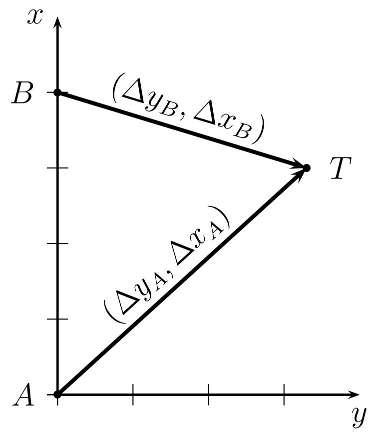
11. Podano imamo eno točko, in sicer $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 10.0\,\mathrm{m})$. Za določitev koordinat dveh novih točk $B(y_B, x_B)$ in $C(y_C, x_C)$ smo izmerili tri vektorje $\mathbf{r}_1$=$(\Delta y_1, \Delta x_1) = (70.1\,\mathrm{m}, 89.8\,\mathrm{m})$, $\mathbf{r}_2$=$(\Delta y_2, \Delta x_2)$=$(69.8\,\mathrm{m}, -69.9\,\mathrm{m})$ in $\mathbf{r}_3$=$(\Delta y_3, \Delta x_3)$=$(140.2\,\mathrm{m}, 19.7\,\mathrm{m})$. Če so komponente vektorja $\mathbf{r}_3$ določene z 2-krat višjo natančnostjo kot komponente vektorjev $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$, izravnajte opazovanja in določite koordinate točk B in C.



Slika 1–8: Naloga 11

REŠITEV: $v_{\Delta y_1} = 13.33\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x_1} = -8.89\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta y_2} = 13.33\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x_2} = -8.89\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta y_3} = -3.33\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x_3} = 2.22\,\mathrm{cm}$, $y_B = 80.233\,\mathrm{m}$, $y_B = 99.711\,\mathrm{m}$, $y_C = 150.167\,\mathrm{m}$, $y_C = 29.722\,\mathrm{m}$, .

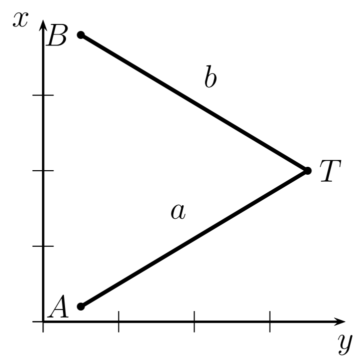
12. Podani imamo točki $A(y_A, x_A)$=(0 m, 0 m) in $B(y_B, x_B)$=(0 m, 5 m). Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva bazna vektorja; $(\Delta y_A, \Delta x_A) = (3.5\,\mathrm{m}, 2.1\,\mathrm{m})$ in $(\Delta y_B, \Delta x_B) = (3.4\,\mathrm{m}, -3.0\,\mathrm{m})$. Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T, če je bazni vektor s točke A določen dvakrat bolj natančno kot bazni vektor s točke B.



Slika 1–9: Naloga 12

REŠITEV: $v_{\Delta y_A} = v_{\Delta x_A} = -2.0\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta y_B} = v_{\Delta c_B} = 8.0\,\mathrm{cm}$, $y_T = 3.48\,\mathrm{m}$, $y_T = 2.07\,\mathrm{m}$.

13. Podani imamo točki $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 10.0\,\mathrm{m})$ in $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 100.0\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo merili dve dolžini, in sicer $a = 60.1$ m m in $b = 60.2\,\mathrm{m}$. Če sta opazovanji različne natančnosti ($\sigma_a = 1\,\mathrm{dm}$, $\sigma_b = 1.5\,\mathrm{dm}$) in med seboj korelirani ($\rho_{ab} = 0.1$), določite koordinato x_T, če vemo, da je koordinata y_T enaka 50.0 m.



Slika 1–10: Naloga 13

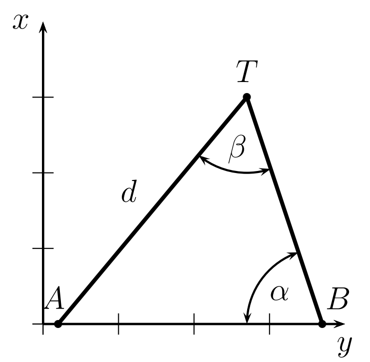
REŠITEV: $v_a = 3.76\,\mathrm{cm}$, $v_b = 7.84\,\mathrm{cm}$, $x_T = 54.9058\,\mathrm{m}$.

14. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$. Med točko A in novo točko T smo izmerili dolžino $d = 75.00\,\mathrm{m}$, na točki T kot $\beta = 87°$ in na točki B kot $\alpha = 56°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.

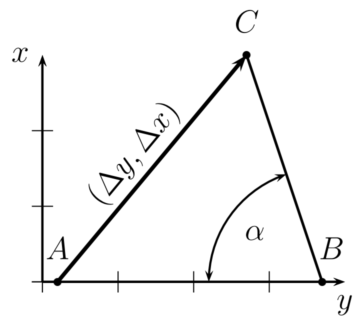
REŠITEV: $v_d = -0.11\,\mathrm{mm}$, $v_\alpha = 19.26'$, $v_\beta = -1.50'$, $y_T = 70.130\,\mathrm{m}$, $x_T = 44.826\,\mathrm{m}$.

15. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60.0\,\mathrm{m}, 45.0\,\mathrm{m})$, na točki B pa kot $\alpha = 56°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.

REŠITEV: $v_{\Delta y} = v_{\Delta x} = 0.0\,\mathrm{mm}$, $v_\alpha = 18.74'$, $y_T = 70.000\,\mathrm{m}$, $x_T = 45.000\,\mathrm{m}$.

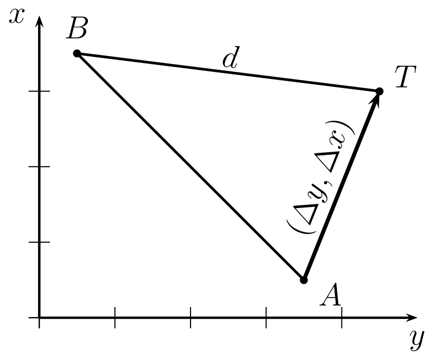


Slika 1–11: Naloga 14



Slika 1–12: Naloga 15

16. V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (123.0\,\mathrm{m}, 95.0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (95.0\,\mathrm{m}, 123.0\,\mathrm{m})$. Da bi določili položaj točke T smo s točke A opazovali bazni vektor $(\Delta y, \Delta x) = (12.15\,\mathrm{m}, 25.95\,\mathrm{m})$, s točke B pa smo opazovali dolžino $d = 40.00\,\mathrm{m}$. Če sta komponenti baznega vektorja opazovani dvakrat bolj natančno kot dolžina, določi koordinate točke $T(y_T, x_T)$ z izravnavo po MNK.



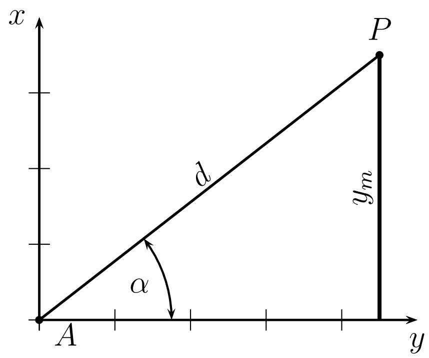
Slika 1–13: Naloga 16

REŠITEV: $v_{\Delta y} = -4.0\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x} = 0.2\,\mathrm{cm}$, $v_d = 16.2\,\mathrm{cm}$, $y_T = 135.110\,\mathrm{m}$, $x_T = 120.952\,\mathrm{m}$.

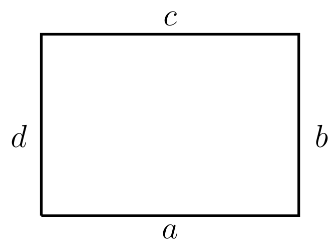
17. Od Točke $A(y_A, x_A) = (0.0\,\mathrm{m}, 0.0\,\mathrm{m})$ smo izmerili dolžino $d = 5.1\,\mathrm{m}$ proti točki P. Izmerjen kot med absciso in izmerjeno dolžino znaša $\alpha = 53°8'$. Izmerili smo še ordinato točke P, ki znaša $y_m = 4.0\,\mathrm{m}$. Izravnaj opazovanja, ki so različne natančnosti, vendar neodvisna $\sigma_d = 3\,\mathrm{cm}$, $\sigma_{y_m} = 2\,\mathrm{cm}$ in $\sigma_\alpha = 15''$.

REŠITEV: $v_d = -5.4\,\mathrm{cm}$, $v_{y_m} = 3.0\,\mathrm{cm}$, $v_\alpha = -0.3''$, $y_P = 3.037\,\mathrm{m}$, $x_P = 4.03\,\mathrm{m}$.

18. V pravokotniku smo izmerili vse stranice in dobili: $a = 15,0$ m, $b = 10,0$ m, $c = 14,9$ m in $d = 10,1$ m. Izravnaj opazovanja in določi površino pravokotnika S. Posredno izravnavo reši tako, da za neznanki nastavite S in a.



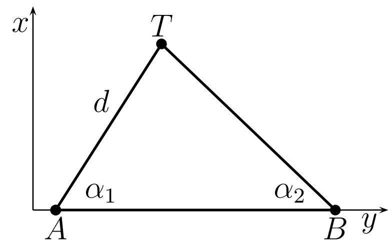
Slika 1–14: Naloga 17



Slika 1–15: Naloga 18

REŠITEV: $v_a = -5.0\,\mathrm{cm}$, $v_b = 5.0\,\mathrm{cm}$, $v_c = -5.0\,\mathrm{cm}$, $v_d = 5.0\,\mathrm{cm}$, $S = 150.25\,\mathrm{m}^2$.

19. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dolžino $d = 64.0\,\mathrm{m}$ in dva kota, $\alpha_1 = 50°42'$ ter $\alpha_2 = 45°$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.



Slika 1–16: Naloga 19

REŠITEV: $v_d = 0.0\,\mathrm{cm}$, $v_{\alpha_1} = 11.3''$, $v_{\alpha_2} = 128.4''$, $y_T = 50.534\,\mathrm{m}$, $x_T = 49.528\,\mathrm{m}$.

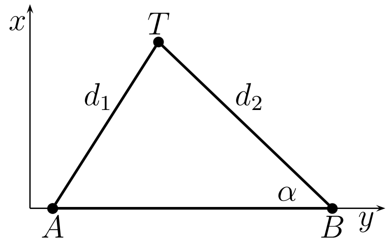
20. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dolžini $d_1 = 64.0\,\mathrm{m}$ in $d_2 = 70.0\,\mathrm{m}$ ter kot $\alpha = 45°0'0''$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.

REŠITEV: $v_{d_1} = v_{d_2} = 0.0\,\mathrm{cm}$, $v_\alpha = 128.4''$, $y_T = 50.533\,\mathrm{m}$, $x_T = 49.528\,\mathrm{m}$.

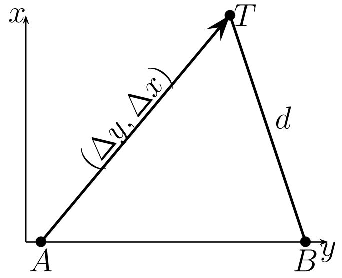
21. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60.0\,\mathrm{m}, 45.0\,\mathrm{m})$, s točke B pa dolžino $d = 54.0\,\mathrm{m}$. Če so natančnosti opazovanj dane kot: $\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\mathrm{dm}$ in $\sigma_d = 5\,\mathrm{cm}$, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.

REŠITEV: $v_{\Delta y} = 3.7\,\mathrm{cm}$, $v_{\Delta x} = -5.5\,\mathrm{cm}$, $v_d = 1.7\,\mathrm{cm}$, $y_T = 70.037\,\mathrm{m}$, $x_T = 44.945\,\mathrm{m}$.

22. S treh danih točk ($A(y_A, x_A) = (0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$, $B(y_B, x_B) = (50\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ in $C(y_C, x_C) = (100\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$) smo izmerili tri dolžine $d_A = 70.7\,\mathrm{m}$, $d_B = 50.1\,\mathrm{m}$ in $d_C = 70.7\,\mathrm{m}$ do nove točke $T(y_T, x_T)$.

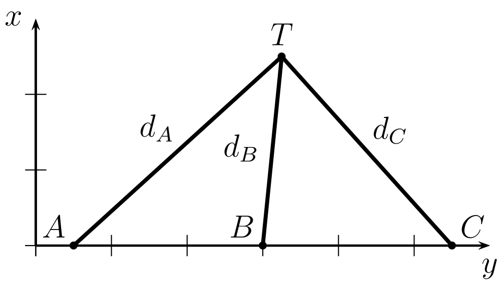


Slika 1–17: Naloga 20



Slika 1–18: Naloga 21

Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T, če so a) opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana in če so b) različne natančnosti, $\sigma_{d_A} : \sigma_{d_B} : \sigma_{d_C} = 1 : 1 : 2$. (Razmislite, kako bi sestavili pogojno enačbo pri pogojni izravnavi?).



Slika 1–19: Naloga 22

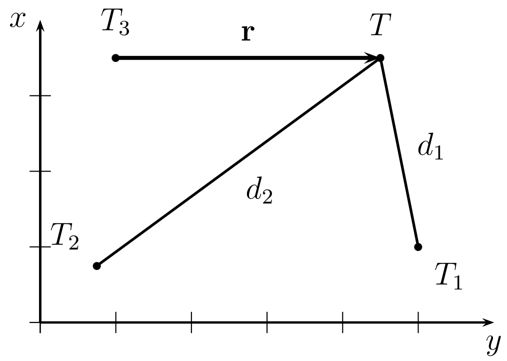
REŠITEV: a)$v_{d_A} = 4.1\,\text{cm}$, $v_{d_B} = -5.8\,\text{cm}$, $v_{d_C} = 4.1\,\text{cm}$, $y_T = 50.000\,\text{m}$, $x_T = 50.043\,\text{m}$ in b) $v_{d_A} = 2.3\,\text{cm}$, $v_{d_B} = -3.3\,\text{cm}$, $v_{d_C} = 9.3\,\text{cm}$, $y_T = 49.951\,\text{m}$, $x_T = 50.067\,\text{m}$.

23. Podane imamo koordinate treh točk, in sicer T_1=(80 m, 20 m), T_2=(10 m, 10 m) in T_3=(20 m, 80 m), kot prikazuje slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo opazovali dolžini $d_1 = 60.8\,\text{m}$, $d_2 = 92.2\,\text{m}$ ($\sigma_{d_1} = \sigma_{d_2} = 2\,\text{cm}$) in vektor $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (50\,\text{m}, 0\,\text{m})$ ($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\text{cm}$, $\rho_{\Delta y \Delta x} = 0.5$). S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T.

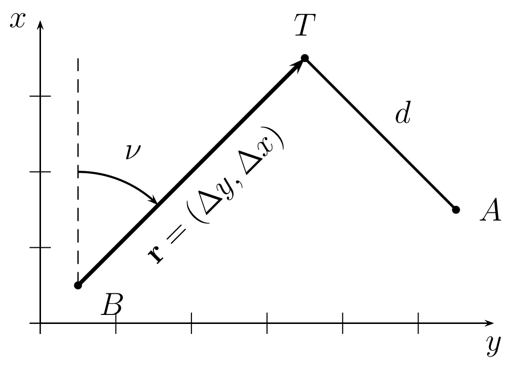
    REŠITEV: $v_{d_1} = 2.42\,\text{cm}$, $v_{d_2} = -0.73\,\text{cm}$, $v_{\Delta y} = -0.01\,\text{cm}$, $v_{\Delta x} = -0.35\,\text{cm}$, $y_T = 70.000\,\text{m}$, $x_T = 79.997\,\text{m}$.

24. Podane imamo koordinate dveh točk, in sicer $A(80\,\text{m}, 20\,\text{m})$ in $B(10\,\text{m}, 10\,\text{m})$, kot prikazuje spodnja slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo opazovali dolžino $d = 60.80\,\text{m}$ ($\sigma_d = 2\,\text{cm}$), vektor $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (60.00\,\text{m}, 70.00\,\text{m})$ ($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\text{cm}$, $\rho_{\Delta y \Delta x} = -0.25$) in smerni kot $\nu = 40°35'$ ($\sigma_\nu = 1'$). Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$.

    REŠITEV: $v_{\Delta y} = -0.13\,\text{cm}$, $v_{\Delta x} = 0.29\,\text{cm}$, $v_d = 2.50\,\text{cm}$, $v_\nu = 66.8''$, $y_T = 69.9987\,\text{m}$, $y_T = 79.997\,\text{m}$.



Slika 1–20: Naloga 23



Slika 1–21: Naloga 24