Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Študijski program 1. stopnje

Geodezija in geoinformatika, 1. letnik

IZRAVNALNI RAČUN 1 - VAJE
Primeri računskih nalog z rešitvami

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Različica: 11. februar 2026

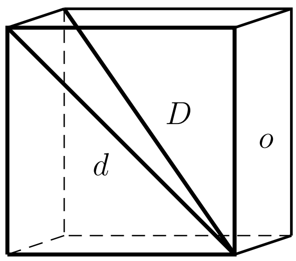
Kazalo vsebine

Kazalo slik

Kazalo preglednic

1 Dodatni primeri izravnave

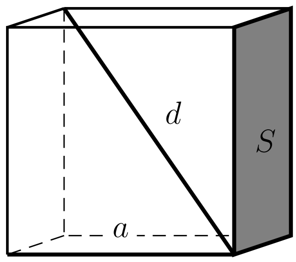
1. V kocki smo izmerili tri količine, in sicer: ploskovno diagonalo ($d = 14{,}0\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo ($D = 17{,}0\,\mathrm{m}$) in obseg osnovne ploskve ($o = 40{,}0\,\mathrm{m}$). S posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja, če sta obe diagonali (d in D) korelirani, saj velja $\rho_{dD} = -0.5$. Izračunaj velikost osnovne ploskve a in njeno natančnost σ_a. Izračunaj tudi prostornino kocke V in njeno natančnost σ_V.



Slika 1–1: Naloga 1

REŠITEV: $a = 9{,}943\,\mathrm{m}$, $v_d = 6{,}2\,\mathrm{cm}$, $v_D = 22{,}2\,\mathrm{cm}$, $v_o = -22{,}7\,\mathrm{cm}$, $V = 983{,}03\,\mathrm{m}^3$.

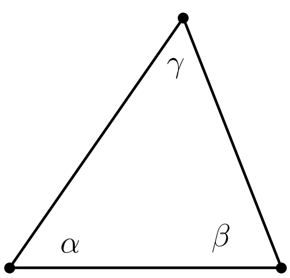
2. V kocki smo opazovali: stranico $a = 10{,}1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0{,}1\,\mathrm{m}$), prostorsko diagonalo $d = 17{,}4\,\mathrm{m}$ ($\sigma_d = 0{,}15\,\mathrm{m}$) in površino osnovne ploskve $S = 99{,}5\,\mathrm{m}^2$ ($\sigma_S = 0{,}7\,\mathrm{m}^2$). Izravnajte opazovanja in določite velikost kocke.



Slika 1–2: Naloga 2

REŠITEV: $\hat{a} = 9{,}996\,\mathrm{m}$, $\hat{d} = 17{,}314\,\mathrm{m}$, $\hat{S} = 99{,}913\,\mathrm{m}^2$.

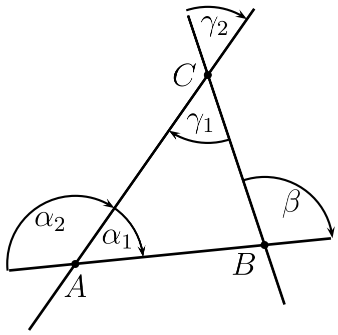
3. V trikotniku smo izmerili vse tri kote in dobili $\alpha = 64°33'$, $\beta = 60°30'$ in $\gamma = 55°0'$. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_\alpha = 1'$, $\sigma_\beta = 2'$ in $\sigma_\gamma = 2'$), izravnaj opazovanja po MNK.



Slika 1–3: Naloga 3

REŠITEV: $\hat{\alpha} = 64°32'40''$, $\hat{\beta} = 60°28'40''$, $\hat{\gamma} = 54°58'40''$.

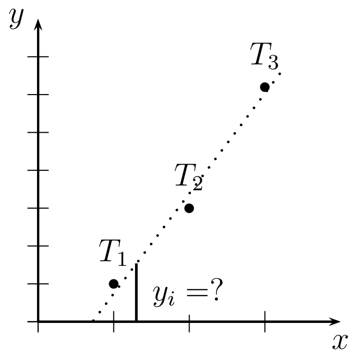
4. Med tremi premicami, ki s presečišči sestavijo trikotnik (glej sliki) smo izmerili 5 kotov, in sicer $\alpha_1 = 50°$, $\alpha_2 = 131°$, $\beta = 106°$, $\gamma_1 = 55°$, $\gamma_2 = 53°$. Če je kot β izmerjen dvakrat bolj natančno od ostalih kotov, s posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja.



Slika 1–4: Naloga 4

REŠITEV: $\hat{\alpha}_1 = 50°30'$, $\hat{\alpha}_2 = 129°30'$, $\hat{\beta} = 105°30'$, $\hat{\gamma}_1 = 55°0'$, $\hat{\gamma}_2 = 55°0'$.

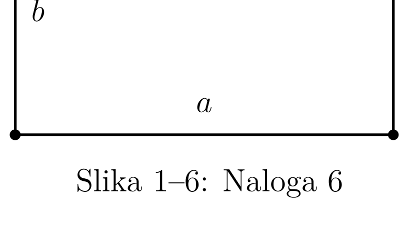
5. V ravnini smo trem točkam izmerili koordinate y (koordinate x so dane) in dobili: $T_1(x_1, y_1) = (1.0, 1.0)$, $T_2(x_2, y_2) = (2.0, 3.0)$ in $T_3(x_3, y_3) = (3.0, 5.1)$. Če so opazovanja enake natančnosti, s posredno in pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice (parametra a in b), ki se optimalno prilega točkam. Izračunaj, kakšna je vrednost koordinate y_i pri vrednosti koordinate $x_i = 1.3$.



Slika 1–5: Naloga 5

REŠITEV: $a = 2{,}05$, $b = -1{,}067$, $\hat{y}_1 = 0{,}983$, $\hat{y}_2 = 3{,}033$, $\hat{y}_3 = 5{,}083$, $y_i = 1{,}5983$.

6. Pri pravokotniku smo izmerili obe stranici: $a = 12{,}4\,\mathrm{m}$ in $b = 7{,}5\,\mathrm{m}$ ter obseg $o = 40{,}0\,\mathrm{m}$. Če so opazovanja različne natančnosti ($\sigma_a = \sigma_b = 1\,\mathrm{dm}$, $\sigma_o = 2\,\mathrm{dm}$) in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in izračunaj površino pravokotnika.



Slika 1–6: Naloga 6

REŠITEV: $v_a = v_b = 3{,}33\,\mathrm{cm}$, $v_o = -6{,}67\,\mathrm{cm}$, $S = 93{,}664\,\mathrm{m}^2$.

7. Nalogo 5 reši tako, da predpostaviš, da je prosti člen $b = -1.0$.

   REŠITEV: $a = 2{,}02$, $\hat{y}_1 = 1{,}021$, $\hat{y}_2 = 3{,}043$, $\hat{y}_3 = 5{,}064$, $y_i = 1{,}628$.

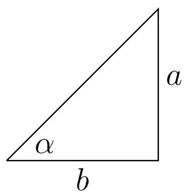
8. Nalogo 5 reši tako, da so opazovane koordinate x, medtem ko so koordinate y dane. Kako bi to nalogo lahko rešili najbolj enostavno?

   REŠITEV: $a = 2{,}05$, $b = -1{,}067$, $\hat{x}_1 = 1{,}008$, $\hat{x}_2 = 1{,}984$, $\hat{x}_3 = 3{,}008$, $y_i = 1{,}598$.

9. V krogli smo izmerili polmer $R = 3{,}65\,\mathrm{m}$ ($\sigma_R = 3\,\mathrm{cm}$), premer $D = 7{,}1\,\mathrm{m}$ ($\sigma_D = 3\,\mathrm{cm}$), površino $A = 158{,}4\,\mathrm{m}^2$ ($\sigma_A = 0{,}12\,\mathrm{m}^2$) in prostornino $V = 187{,}5\,\mathrm{m}^3$ ($\sigma_V = 0{,}15\,\mathrm{m}^3$). Izravnajte opazovanja s posredno in pogojno izravnavo po MNK.

   REŠITEV: $\hat{R} = 3{,}5528\,\mathrm{m}$, $\hat{D} = 7{,}1057\,\mathrm{m}$, $\hat{A} = 158{,}5034\,\mathrm{m}^2$, $\hat{V} = 187{,}4243\,\mathrm{m}^3$.

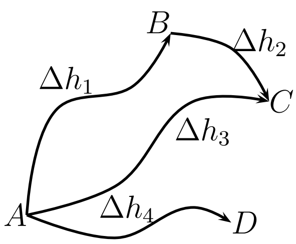
10. V pravokotnem trikotniku smo izmerili: $a = 10{,}0\,\mathrm{m}$, $b = 15{,}0\,\mathrm{m}$, in $\alpha = 30°$. Če so natančnosti opazovanj dane kot $\sigma_a = 1\,\mathrm{cm}$, $\sigma_b = 2\,\mathrm{cm}$ in $\sigma_\alpha = 30'$, izravnaj opazovanja in določi površino trikotnika S.



Slika 1–7: Naloga 10

   REŠITEV: $v_a = -0{,}44\,\mathrm{cm}$, $v_b = 1{,}01\,\mathrm{cm}$, $v_\alpha = 3{,}81°$, $S = 75{,}018\,\mathrm{m}^2$.

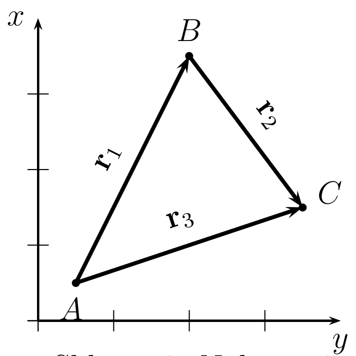
11. V lokalni višinski geodetski mreži ima reper A dano višino $H_A = 10{,}0\,\mathrm{m}$. Izmerili smo 4 višinske razlike s pripadajočimi dolžinami nivelmanskih linij: $\Delta h_1 = -1{,}01\,\mathrm{m}$ ($d_1 = 50\,\mathrm{m}$), $\Delta h_2 = 0{,}73\,\mathrm{m}$ ($d_2 = 20\,\mathrm{m}$), $\Delta h_3 = -0{,}25\,\mathrm{m}$ ($d_3 = 50\,\mathrm{m}$) in $\Delta h_4 = 0{,}12\,\mathrm{m}$ ($d_4 = 50\,\mathrm{m}$). Izravnaj opazovanja in določi višine reperjev B, C in D.



Slika 1–8: Naloga 11

   REŠITEV: $v_1 = 1{,}25\,\mathrm{cm}$, $v_b = 0{,}50\,\mathrm{cm}$, $v_3 = -1{,}25\,\mathrm{cm}$, $v_4 = 0{,}0\,\mathrm{cm}$, $H_B = 9{,}0025\,\mathrm{m}$, $H_C = 9{,}7375\,\mathrm{m}$, $H_D = 10{,}12\,\mathrm{m}$.

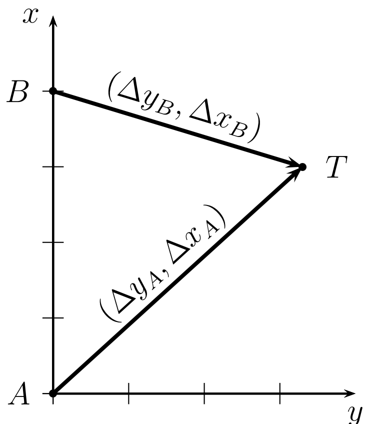
12. Podano imamo eno točko, in sicer $A(y_A, x_A) = (10{,}0\,\mathrm{m}, 10{,}0\,\mathrm{m})$. Za določitev koordinat dveh novih točk $B(y_B, x_B)$ in $C(y_C, x_C)$ smo izmerili tri vektorje $\mathbf{r}_1{=}(\Delta y_1, \Delta x_1) = (70{,}1\,\mathrm{m}, 89{,}8\,\mathrm{m})$, $\mathbf{r}_2{=}(\Delta y_2, \Delta x_2){=}(69{,}8\,\mathrm{m}, -69{,}9\,\mathrm{m})$ in $\mathbf{r}_3{=}(\Delta y_3, \Delta x_3){=}(140{,}2\,\mathrm{m}, 19{,}7\,\mathrm{m})$. Če so komponente vektorja $\mathbf{r}_3$ določene z 2-krat višjo natančnostjo kot komponente vektorjev $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$, izravnajte opazovanja in določite koordinate točk B in C.



Slika 1–9: Naloga 12

REŠITEV: $v_{\Delta y_1} = 13{,}33\,\text{cm}$, $v_{\Delta x_1} = -8{,}89\,\text{cm}$, $v_{\Delta y_2} = 13{,}33\,\text{cm}$, $v_{\Delta x_2} = -8{,}89\,\text{cm}$, $v_{\Delta y_3} = -3{,}33\,\text{cm}$, $v_{\Delta x_3} = 2{,}22\,\text{cm}$, $y_B = 80{,}233\,\text{m}$, $y_B = 99{,}711\,\text{m}$, $y_C = 150{,}167\,\text{m}$, $y_C = 29{,}722\,\text{m}$, .

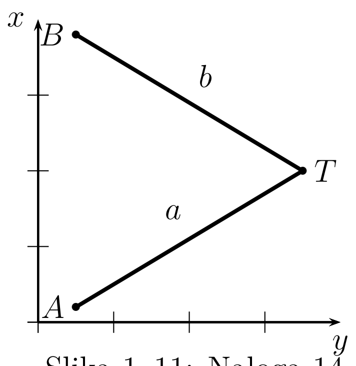
13. Podani imamo točki $A(y_A, x_A)$=(0 m, 0 m) in $B(y_B, x_B)$=(0 m, 5 m). Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dva bazna vektorja; $(\Delta y_A, \Delta x_A) = (3{,}5\,\text{m}, 2{,}1\,\text{m})$ in $(\Delta y_B, \Delta x_B) = (3{,}4\,\text{m}, -3{,}0\,\text{m})$. Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T, če je bazni vektor s točke A določen dvakrat bolj natančno kot bazni vektor s točke B.



Slika 1–10: Naloga 13

REŠITEV: $v_{\Delta y_A} = v_{\Delta x_A} = -2{,}0\,\text{cm}$, $v_{\Delta y_B} = v_{\Delta c_B} = 8{,}0\,\text{cm}$, $y_T = 3{,}48\,\text{m}$, $y_T = 2{,}07\,\text{m}$.

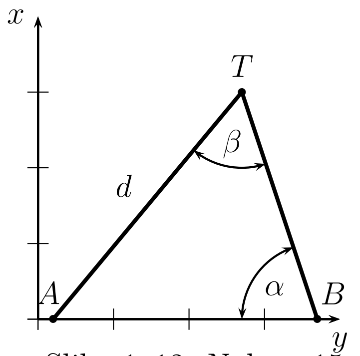
14. Podani imamo točki $A(y_A, x_A) = (10{,}0\,\text{m}, 10{,}0\,\text{m})$ in $A(y_A, x_A) = (10{,}0\,\text{m}, 100{,}0\,\text{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo merili dve dolžini, in sicer $a = 60{,}1\,\text{m}$ m in $b = 60{,}2\,\text{m}$. Če sta opazovanji različne natančnosti ($\sigma_a = 1\,\text{dm}$, $\sigma_b = 1{,}5\,\text{dm}$) in med seboj korelirani ($\rho_{ab} = 0.1$), določite koordinato x_T, če vemo, da je koordinata y_T enaka 50,0 m.



Slika 1–11: Naloga 14

REŠITEV: $v_a = 3{,}76\,\text{cm}$, $v_b = 7{,}84\,\text{cm}$, $x_T = 54{,}9058\,\text{m}$.

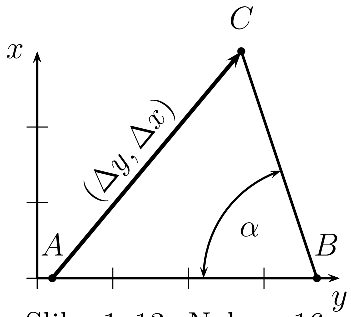
15. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10{,}0\,\text{m}, 0{,}0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100{,}0\,\text{m}, 0{,}0\,\text{m})$. Med točko A in novo točko T smo izmerili dolžino $d = 75{,}00\,\text{m}$, na točki T kot $\beta = 87°$ in na točki B kot $\alpha = 56°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.



Slika 1–12: Naloga 15

REŠITEV: $v_d = -0{,}11\,\text{mm}$, $v_\alpha = 19{,}26'$, $v_\beta = -1{,}50'$, $y_T = 70{,}130\,\text{m}$, $x_T = 44{,}826\,\text{m}$.

16. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10{,}0\,\text{m}, 0{,}0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100{,}0\,\text{m}, 0{,}0\,\text{m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60{,}0\,\text{m}, 45{,}0\,\text{m})$, na točki B pa kot $\alpha = 56°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.



Slika 1–13: Naloga 16

REŠITEV: $v_{\Delta y} = v_{\Delta x} = 0{,}0\,\text{mm}$, $v_\alpha = 18{,}74'$, $y_T = 70{,}000\,\text{m}$, $x_T = 45{,}000\,\text{m}$.

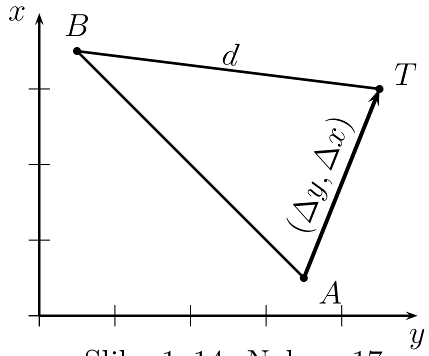
17. V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (123{,}0\,\text{m}, 95{,}0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (95{,}0\,\text{m}, 123{,}0\,\text{m})$. Da bi določili položaj točke T smo s točke A opazovali bazni vektor $(\Delta y, \Delta x) = (12{,}15\,\text{m}, 25{,}95\,\text{m})$, s točke B pa smo opazovali dolžino $d = 40{,}00\,\text{m}$. Če sta komponenti baznega vektorja opazovani dvakrat bolj natančno kot dolžina, določi koordinate točke $T(y_T, x_T)$ z izravnavo po MNK.

REŠITEV: $v_{\Delta y} = -4{,}0\,\text{cm}$, $v_{\Delta x} = 0{,}2\,\text{cm}$, $v_d = 16{,}2\,\text{cm}$, $y_T = 135{,}110\,\text{m}$, $x_T = 120{,}952\,\text{m}$.

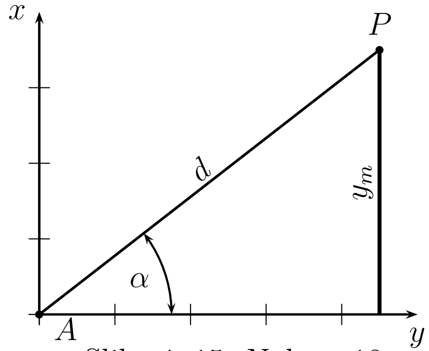
18. Od Točke $A(y_A, x_A) = (0{,}0\,\text{m}, 0{,}0\,\text{m})$ smo izmerili dolžino $d = 5{,}1\,\text{m}$ proti točki P. Izmerjen kot med absciso in izmerjeno dolžino znaša $\alpha = 53°8'$. Izmerili smo še ordinato točke P, ki znaša $y_m = 4{,}0\,\text{m}$. Izravnaj opazovanja, ki so različne natančnosti, vendar neodvisna $\sigma_d = 3\,\text{cm}$, $\sigma_{y_m} = 2\,\text{cm}$ in $\sigma_\alpha = 15''$.

REŠITEV: $v_d = -5{,}4\,\text{cm}$, $v_{y_m} = 3{,}0\,\text{cm}$, $v_\alpha = -0{,}3''$, $y_P = 3{,}037\,\text{m}$, $x_P = 4{,}03\,\text{m}$.

19. V pravokotniku smo izmerili vse stranice in dobili: $a = 15,0$ m, $b = 10,0$ m, $c = 14,9$ m in $d = 10,1$ m. Izravnaj opazovanja in določi površino pravokotnika S. Posredno izravnavo reši tako, da za neznanki nastavite S in a.



Slika 1–14: Naloga 17



Slika 1–15: Naloga 18

REŠITEV: $v_a = -5{,}0\,\text{cm}$, $v_b = 5{,}0\,\text{cm}$, $v_c = -5{,}0\,\text{cm}$, $v_d = 5{,}0\,\text{cm}$, $S = 150{,}25\,\text{m}^2$.

20. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\text{m}, 0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\text{m}, 0\,\text{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dolžino $d = 64{,}0\,\text{m}$ in dva kota, $\alpha_1 = 50°42'$ ter $\alpha_2 = 45°$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.

    REŠITEV: $v_d = 0{,}0\,\text{cm}$, $v_{\alpha_1} = 11{,}3''$, $v_{\alpha_2} = 128{,}4''$, $y_T = 50{,}534\,\text{m}$, $x_T = 49{,}528\,\text{m}$.

21. Dani sta dve točki, in sicer $A(y_A, x_A) = (10\,\text{m}, 0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\text{m}, 0\,\text{m})$. Do nove točke $T(y_T, x_T)$ smo izmerili dolžini $d_1 = 64{,}0\,\text{m}$ in $d_2 = 70{,}0\,\text{m}$ ter kot $\alpha = 45°$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.

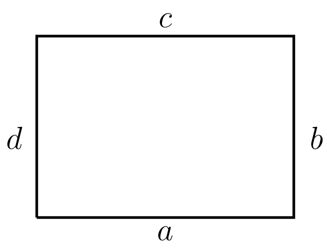
    REŠITEV: $v_{d_1} = v_{d_2} = 0{,}0\,\text{cm}$, $v_\alpha = 128{,}4''$, $y_T = 50{,}533\,\text{m}$, $x_T = 49{,}528\,\text{m}$.

22. Dani sta dve točki: $A(y_A, x_A) = (10\,\text{m}, 0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100\,\text{m}, 0\,\text{m})$. S točke A smo do nove točke T izmerili bazni vektor GNSS $(\Delta y, \Delta x) = (60{,}0\,\text{m}, 45{,}0\,\text{m})$, s točke B pa dolžino $d = 54{,}0\,\text{m}$. Če so natančnosti opazovanj dane kot: $\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\text{dm}$ in $\sigma_d = 5\,\text{cm}$, izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T.

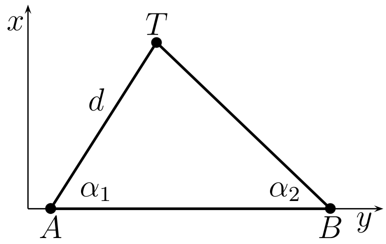
    REŠITEV: $v_{\Delta y} = 3{,}7\,\text{cm}$, $v_{\Delta x} = -5{,}5\,\text{cm}$, $v_d = 1{,}7\,\text{cm}$, $y_T = 70{,}037\,\text{m}$, $x_T = 44{,}945\,\text{m}$.

23. S treh danih točk ($A(y_A, x_A) = (0\,\text{m}, 0\,\text{m})$, $B(y_B, x_B) = (50\,\text{m}, 0\,\text{m})$ in $C(y_C, x_C) = (100\,\text{m}, 0\,\text{m})$) smo izmerili tri dolžine $d_A = 70{,}7\,\text{m}$, $d_B = 50{,}1\,\text{m}$ in $d_C = 70{,}7\,\text{m}$ do nove točke $T(y_T, x_T)$. Izravnaj opazovanja in določi koordinate točke T, če so a) opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana in če so b) različne natančnosti, $\sigma_{d_A} : \sigma_{d_B} : \sigma_{d_C} = 1 : 1 : 2$. (Razmislite, kako bi sestavili pogojno enačbo pri pogojni izravnavi?).

    REŠITEV: a)$v_{d_A} = 4{,}1\,\text{cm}$, $v_{d_B} = -5{,}8\,\text{cm}$, $v_{d_C} = 4{,}1\,\text{cm}$, $y_T = 50{,}000\,\text{m}$, $x_T = 50{,}043\,\text{m}$ in b) $v_{d_A} = 2{,}3\,\text{cm}$, $v_{d_B} = -3{,}3\,\text{cm}$, $v_{d_C} = 9{,}3\,\text{cm}$, $y_T = 49{,}951\,\text{m}$, $x_T = 50{,}067\,\text{m}$.



Slika 1–16: Naloga 19



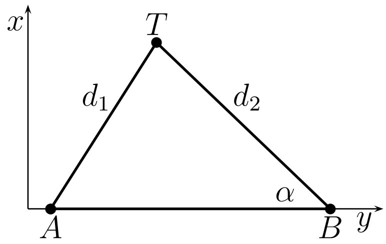
Slika 1–17: Naloga 20

24. Podane imamo koordinate treh točk, in sicer T_1=(80 m, 20 m), T_2=(10 m, 10 m) in T_3=(20 m, 80 m), kot prikazuje slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo opazovali dolžini $d_1 = 60{,}8\,\text{m}$, $d_2 = 92{,}2\,\text{m}$ ($\sigma_{d_1} = \sigma_{d_2} = 2\,\text{cm}$) in vektor $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (50\,\text{m}, 0\,\text{m})$ ($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\text{cm}$, $\rho_{\Delta y \Delta x} = 0.5$). S pogojno in posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite koordinate točke T.

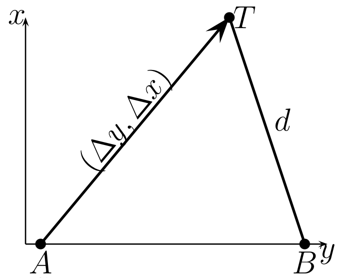
    REŠITEV: $v_{d_1} = 2{,}42\,\text{cm}$, $v_{d_2} = -0{,}73\,\text{cm}$, $v_{\Delta y} = -0{,}01\,\text{cm}$, $v_{\Delta x} = -0{,}35\,\text{cm}$, $y_T = 70{,}000\,\text{m}$, $x_T = 79{,}997\,\text{m}$.

25. Podane imamo koordinate dveh točk, in sicer $A(80\,\text{m}, 20\,\text{m})$ in $B(10\,\text{m}, 10\,\text{m})$, kot prikazuje spodnja slika. Da bi določili koordinate nove točke $T(y_T, x_T)$ smo opazovali dolžino $d = 60{,}80\,\text{m}$ ($\sigma_d = 2\,\text{cm}$), vektor $\mathbf{r} = (\Delta y, \Delta x) = (60{,}00\,\text{m}, 70{,}00\,\text{m})$ ($\sigma_{\Delta y} = \sigma_{\Delta x} = 1\,\text{cm}$, $\rho_{\Delta y \Delta x} = -0{,}25$) in smerni kot $\nu = 40°35'$ ($\sigma_\nu = 1'$). Izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$.

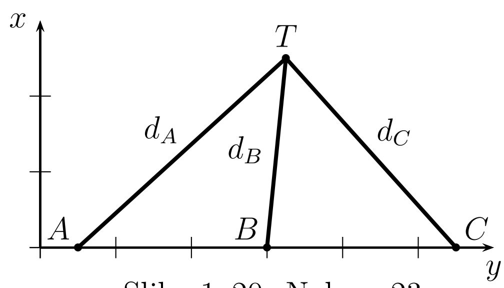
    REŠITEV: $v_{\Delta y} = -0{,}13\,\text{cm}$, $v_{\Delta x} = 0{,}29\,\text{cm}$, $v_d = 2{,}50\,\text{cm}$, $v_\nu = 66{,}8''$, $y_T = 69{,}9987\,\text{m}$, $y_T = 79{,}997\,\text{m}$.



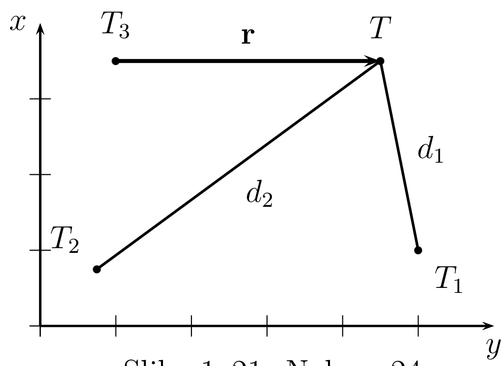
Slika 1–18: Naloga 21



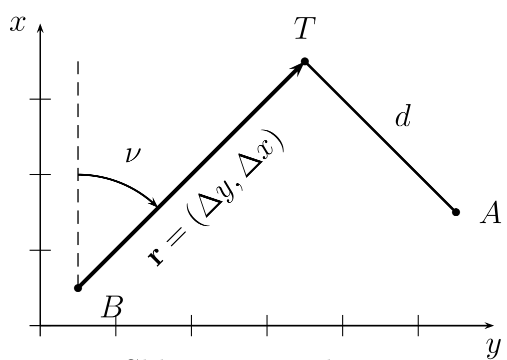
Slika 1–19: Naloga 22



Slika 1–20: Naloga 23



Slika 1–21: Naloga 24



Slika 1–22: Naloga 25