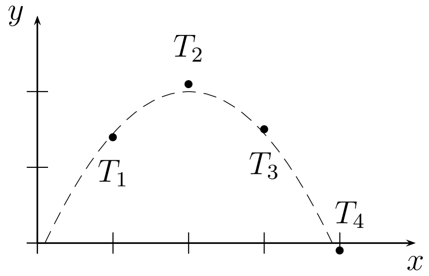
Pogojna izravnava po MNK – Točke na paraboli:

V ravnini smo izmerili koordinate y štirim točkam in dobili: $T_1(1, 1.4)$, $T_2(2, 2.1)$, $T_3(3, 1.5)$ in $T_4(4, -0.1)$, koordinate x točk obravnavamo kot konstante. S pogojno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite parametre parabole, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1: Točke v ravnini, ki ležijo na paraboli

Rešitev s postopkom pogojne izravnave po MNK

Postopek pogojne izravnave sledi korakom iz datoteke *PosrednaIzravnavaMNK.pdf*. Posvetili pa se bomo nastavitvi pogojne enačbe.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = \_\_\_$, $n_0 = \_\_\_$, $r = \_\_\_$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži $\mathbf{Q}$ enaka:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r = \_\_\_$, v katerih lahko nastopajo le izravnana opazovanja, $\hat{y}_i$, in konstante, x_i, $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Ugotoviti moramo, kakšnemu pogoju morajo opazovanja in konstante zadoščati, da bodo opisovali parabolo. Sestavimo prvo enačbe parabole, ki povezujejo izravnana opazovanja in konstante:

$$\begin{aligned} F_1 : \hat{y}_1 &= a x_1^2 + b x_1 + c \\ F_2 : \hat{y}_2 &= a x_2^2 + b x_2 + c \\ F_3 : \hat{y}_3 &= a x_3^2 + b x_3 + c \\ F_4 : \hat{y}_4 &= a x_4^2 + b x_4 + c \end{aligned} \tag{3}$$

V enačbi 3 vidimo, da imamo prvič 4 enačbe, v katerih pa nastopajo koeficienti parabole a, b in c, ki v pogojni enačbi ne smejo nastopati. Do rešitve bomo prišli tako, da bomo iz enačb 3 korak po koraku eliminirali posamezne koeficiente. Začnemo tako, da eliminiramo prosti člen c. Naredimo zaporedne razlike med enačbami:

$$\begin{aligned} F_2 - F_1 : \hat{y}_2 - \hat{y}_1 =& a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) \\ F_3 - F_2 : \hat{y}_3 - \hat{y}_2 =& a(x_3^2 - x_2^2) + b(x_3 - x_2) \\ F_4 - F_3 : \hat{y}_4 - \hat{y}_3 =& a(x_4^2 - x_3^2) + b(x_4 - x_3) \end{aligned} \tag{4}$$

V enačbah 4 vse tri dobljene enačbe delimo tako, da bomo imeli na desni člen b prost:

$$\begin{aligned} \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} : \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} =& a(x_2 + x_1) + b \\ \frac{F_3 - F_2}{x_3 - x_2} : \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} =& a(x_3 + x_2) + b \\ \frac{F_4 - F_3}{x_4 - x_3} : \frac{\hat{y}_4 - \hat{y}_3}{x_4 - x_3} =& a(x_4 + x_3) + b \end{aligned} \tag{5}$$

Sedaj bomo eliminirali parameter b, in sicer spet z zaporednimi razlikami:

$$\begin{aligned} \frac{F_3 - F_2}{x_3 - x_2} - \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} : \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} - \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} =& a(x_3 - x_1) \\ \frac{F_4 - F_3}{x_4 - x_3} - \frac{F_3 - F_2}{x_3 - x_2} : \frac{\hat{y}_4 - \hat{y}_3}{x_4 - x_3} - \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} =& a(x_4 - x_2) \end{aligned} \tag{6}$$

Obe enačbi 6 delimo tako, da bomo osamili parameter a. Dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{F_3 - F_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} - \frac{F_2 - F_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} : \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} - \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} =& a \\ \frac{F_4 - F_3}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)} - \frac{F_3 - F_2}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} : \frac{\hat{y}_4 - \hat{y}_3}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)} - \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} =& a \end{aligned} \tag{7}$$

Končen korak je samo še, da enačbi 7 izenačimo in vse elemente damo na levo stran enačaja. Dobimo končno obliko pogojne enačbe:

$$F \equiv \frac{\hat{y}_4 - \hat{y}_3}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)} - \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} - \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} + \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} = 0 \tag{8}$$

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti __ × __. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev

enako številu opazovanj. Parcialni odvodi pa so enaki:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y_1} &= -\frac{1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} \\
\frac{\partial F}{\partial y_2} &= \frac{1}{(x_3-x_2)(x_4-x_2)} + \frac{1}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)} + \frac{1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} \\
\frac{\partial F}{\partial y_3} &= -\frac{1}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)} - \frac{1}{(x_3-x_2)(x_4-x_2)} - \frac{1}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)} \\
\frac{\partial F}{\partial y_3} &= \frac{1}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)}
\end{aligned} \tag{9}$$

Matrika $\mathbf{A}$ ima glede na parcialne odvode iz enačbe 9 obliko:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} & \frac{\partial F}{\partial y_3} & \frac{\partial F}{\partial y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti $\_ \times \_$, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojni enačbi iz 8 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_ \end{bmatrix} \tag{11}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti $\_ \times \_$. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{12}$$

   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{13}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti $\_ \times \_$, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{14}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{15}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1 in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe 15:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{16}$$

8. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Na koncu želimo zapisali enačbo parabole, ki se optimalno prilega točkam. A kako dobiti parametre parabole? Izhajali bomo iz vmesnih enačb izpeljave pogojne enačbe, to so enačbe 3 - 7. Za izračun parametra a bomo izhajali iz prve enačbe v 7, kjer dobimo:

$$a = \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} - \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} = \_\_ \tag{17}$$

   Ko imamo izračunan parameter a, lahko sedaj izračunamo parameter b. Izhajamo iz prve enačbe v 5 in dobimo:

$$b = \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} - a(x_2 + x_1) = \_\_ \tag{18}$$

   Na koncu še iz prve enačbe iz 3 izračunamo parameter c:

$$c = \hat{y}_1 - a x_1^2 - b x_1 = \_\_ \tag{19}$$

   Zapišimo samo še iskano enačbo parabole, ki se optimalno prilega točkam:

$$y = ax^2 + bx + c = \_\_ x^2 + \_\_ x + \_\_ \tag{20}$$