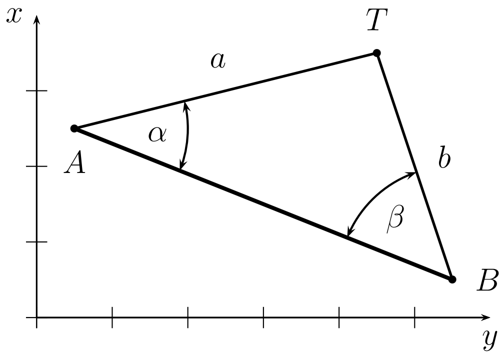
Pogojna izravnava po MNK – Ravninska geodetska mreža (2):

V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (5.00\,\mathrm{m}, 10.00\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (20.00\,\mathrm{m}, 0.00\,\mathrm{m})$. Da bi določili položaj točke T, smo s točke A opazovali dolžino $a = 16.2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0.1\,\mathrm{m}$) in kot $\alpha = 45°$ ($\sigma_\alpha = 30'$), s točke B pa dolžino $b = 13.2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_b = 0.1\,\mathrm{m}$) in kot $\beta = 60°$ ($\sigma_\beta = 30'$), kot to prikazuje slika 1. S pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj koordinate točke $T(y_T, x_T)$.



Slika 1: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja točke T

Rešitev s postopkom pogojne izravnave po MNK

Postopek pogojne izravnave sledi korakom iz datoteke *PogojnaIzravnavaMNK.pdf*.

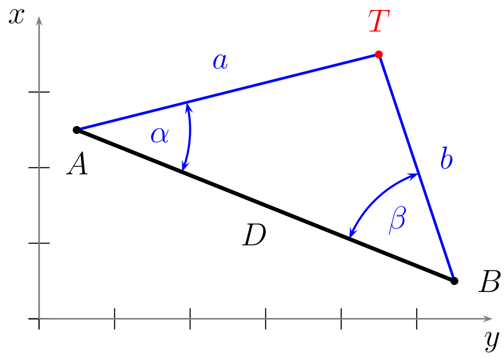
1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz podatkov vidimo, da imamo opazovani dve dolžini in dva kota, torej je $n =$ ___. Ker moramo določiti koordinate točke T, je $n_0 =$ ___ in zato $r =$ ___. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ je zato velikosti __ × __ in ima obliko:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ b \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Opazovanja so različne natančnosti in medseboj nekorelirana. Sestavimo kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$, za referenčno varianco si izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$ in dobimo kofaktorje opazovanj enake:

$$q_a = \_\_ \quad q_\alpha = \_\_ \quad q_b = \_\_ \quad q_\beta = \_\_ \tag{2}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r =$ ___, v katerih lahko nastopajo le izravnana



Slika 2: Prikaz opazovanj in danih količin za nastavitev pogojnih enačb

opazovanja in konstante (koordinate točk A in B). Da bi sestavili pogojni enačbi, izrišimo sliko opazovanj in danih količin, kot to prikazuje slika 2.

Na sliki 2 so z modro označena opazovanja (a, α, b, β), s črno dane količine (točki A in B določata dolžino D), z rdečo pa neznanke (koordinate točke T). Vidimo tudi, da so vsa opazovanja in dane količine podane v splošnem trikotniku $\triangle ABT$. Stranico $D = \overline{AB}$ izračunamo iz koordinat točk A in B in dobimo:

$$D = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \_\_\mathrm{m} \tag{3}$$

Pogojni enačbi sestavimo tako, da bodo v enačbah nastopala vsa opazovanja in stranica D. Uporabimo osnovne izreke trikotnika, primer dveh pogojnih enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}\sin\hat{\alpha} - \hat{b}\sin\hat{\beta} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - D^2 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Pri prvi pogojni enačbi iz enačbe 4 smo uporabili sinusov izrek, ki povezuje dve stranici in nasproti ležeča kota. Pri drugi pogojni enačbi pa smo uporabili kosinusni izrek, ki povezuje vse tri stranice in en kot, kjer smo si za kot izbrali kot na točki T, ki je enak $180.0000° - \alpha - \beta$. Uporabili smo identiteto: $\cos(180.0000° - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta)$.

Pri obravnavi geodetskih opazovanj v geodetski mreži pri pogojni izravnavi po MNK je ključnega pomena ***poznavanje enačb splošnega trikotnika****. Pri terestričnih opazovanjih (dolžine, smeri / koti) geodetsko mrežo rešujemo tako, da izravnamo opazovanja v trikotnikih. V teh primerih so koordinate danih točk pomembne le za izračune dolžin in kotov med točkami. V primerih, ko opazujemo tudi bazne vektorje GNSS, pa uporabimo tudi znanje prehoda med* ***geodetskim kartezičnim koordinatnim sistemom*** *in* ***geodetskim polarnim koordinatnim sistemom****.*

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti $\_ \times \_$. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev

enako številu opazovanj. Odvajamo pogojne enačbe po opazovajih in dobimo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{5}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti _ $\times$ _, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz 4 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(a \sin\alpha - b \sin\beta) \\ -(a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha+\beta) - D^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti _ $\times$ _. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \_ & \_ \\ \_ & \_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti _ $\times$ _, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_ \\ \_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_\alpha \\ v_b \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

V enačbi 10 sta popravka v_α in v_β podana v radianih. Zapišemo jih lahko tudi kot $v_\alpha =$ _'_'' in $v_\beta =$ _'_''.

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1 in

vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe 10:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{11}$$

Tudi v enačbi 11 sta izravnana kota $\hat{\alpha}$ in $\hat{\beta}$ podana v radianih, ki ju lahko zapišemo kot $\hat{\alpha} = \_^\circ\_'\_''$ in $\hat{\beta} = \_^\circ\_'\_''$.

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Pri tej nalogi ne bomo delali dodatne iteracije izravnave.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Kadar izravnavamo geodetska opazovanja v geodetski mreži, so pri pogojni izravnavi rezultati izravnana opazovanja (enačba 11). Nas pa zanimajo končne koordinate točk, v našem primeru koordinati y_T in x_T točke T. Izračunamo jih iz izravnanih opazovanj in danih koordinat točk A in B, enačbe za izračun pa nastavimo iz enačb prehoda med geodetskim polarnim in geodetskim kartezičnim koordinatnim sistemom.

   Za izračun koordinat točke T bomo izhajali z dane točke A (poskusite tudi s točke B in primerjajte rezultate), izračun pa je dan z:

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + \hat{a}\sin\nu_A^T = y_A + \hat{a}\sin(\nu_A^B - \hat{\alpha}) \\ x_T &= x_A + \hat{a}\cos\nu_A^T = x_A + \hat{a}\cos(\nu_A^B - \hat{\alpha}) \end{aligned} \tag{12}$$

   V enačbi 12 smerni kot ν_A^B izračunamo iz koordinat in dobimo $\nu_A^B = \_^\circ\_'\_''$. Koordinate točke T so:

$$\begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{13}$$