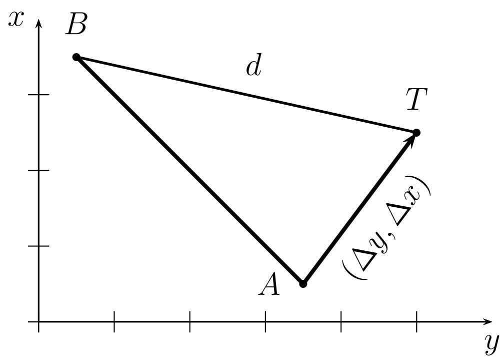
Pogojna izravnava po MNK – Ravninska geodetska mreža (1):

V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (123.00\,\text{m}, 95.00\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (95.00\,\text{m}, 123.00\,\text{m})$. Da bi določili položaj točke T smo s točke A opazovali bazni vektor $(\Delta y, \Delta x) = (12.15\,\text{m}, 25.95\,\text{m})$, s točke B pa smo opazovali dolžino $d = 40.00\,\text{m}$, kot to prikazuje slika 1. Če so opazovanja enake natančnostjo in medseboj neodvisna, določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$ s pogojno izravnavo po MNK.



Slika 1: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja točke T

Rešitev s postopkom pogojne izravnave po MNK

Postopek pogojne izravnave sledi korakom iz datoteke *PogojnaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Vidimo, imamo opazovani komponenti baznega vektorja in eno dolžino, torej je $n =$ ___. Ker moramo določiti koordinate točke T, je $n_0 =$ ___ in zato $r =$ ___. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ je zato velikosti _ × _ in ima obliko:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta x \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, so kofaktorji opazovanj enaki:

$$q_{\Delta x} = \_\_\_ \quad q_{\Delta y} = \_\_\_ \quad q_d = \_\_\_ \tag{2}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r =$ ___, v katerih lahko nastopajo le izravnana opazovanja in konstante (koordinate točk A in B). Izhajamo iz funkcijske povezave med geodetskimi opazovanji in koordinatami točk, kjer za dolžino d velja:

$$d = \sqrt{(y_T - y_B)^2 + (x_T - x_B)^2} \tag{3}$$

za komponenti baznega vektorja pa:

$$\Delta y = y_T - y_A \qquad \Delta x = x_T - x_A \tag{4}$$

Iz enačbe 4 izrazimo koordinati y_T in x_T in ju vnesemo v enačbo 3 ter dobimo:

$$d = \sqrt{(y_A + \Delta y - y_B)^2 + (x_A + \Delta x - x_B)^2} \tag{5}$$

Enačbo 5 uporabimo za sestavo pogojne enačbe. Pomislimo, da bomo morali odvajati po vseh opazovanjih, zato jo poenostavimo in izrazimo z izravnanimi opazovanji. Dobimo:

$$F \equiv \hat{d}^2 - (y_A + \Delta\hat{y} - y_B)^2 - (x_A + \Delta\hat{x} - x_B)^2 = 0 \tag{6}$$

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti _ × _. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \Delta y} & \frac{\partial F}{\partial \Delta x} & \frac{\partial F}{\partial d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

   Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti _ × _, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz 6 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(d^2 - (y_A + \Delta y - y_B)^2 - (x_A + \Delta x - x_B)^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti _ × _. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti _ × _, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{11}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{QA}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_{\Delta y} \\ v_{\Delta x} \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{12}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1 in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe 12:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{13}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Za kontrolo v pogojno enačbo 6 vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe 13 in dobimo:

$$\hat{d}^2 - (y_A + \Delta\hat{y} - y_B)^2 - (x_A + \Delta\hat{x} - x_B)^2 = -1.03 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \tag{14}$$

   Vidimo, da je odstopanje na desni strani enačbe majhno, nove iteracije ni potrebno izvesti.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Na koncu iz izravnanih opazovanj (enačba 13) in danih koordinat točk A in B izračunamo še koordinate točke T (kakšen je najenostavnejši način?):

$$\begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{15}$$