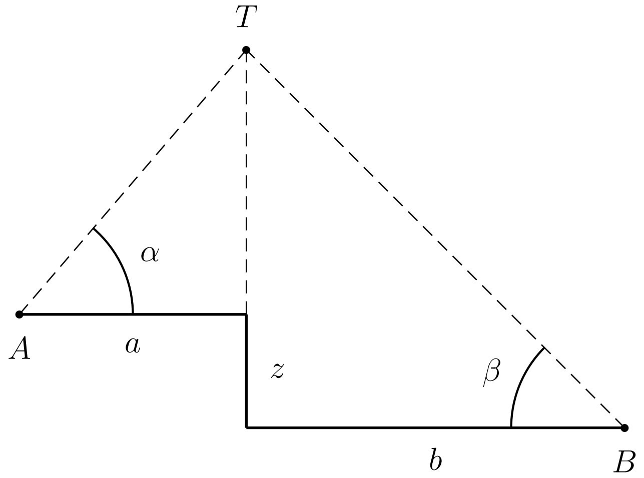
Pogojna izravnava po MNK – Višine reperjev:

Dano imamo višino reperja A ($H_A = 320.00\,\mathrm{m}$), želimo pa določiti višini reperjev T in B, zato smo izmerili opazovanja, kot jih prikazuje slika 1. Z reperja A smo do reperja T izmerili horizontalno dolžino $a = 15.0\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0.05\,\mathrm{m}$) in višinski kot $\alpha = 45^\circ$ ($\sigma_\alpha = 5'$), z reperja B do reperja T horizontalno dolžino $b = 30.0\,\mathrm{m}$ ($\sigma_b = 0.05\,\mathrm{m}$) in višinski kot $\beta = 30^\circ$ ($\sigma_\beta = 5'$) ter višinsko razliko $z = 2.4\,\mathrm{m}$ ($\sigma_z = 0.05\,\mathrm{m}$) od reperja B do reperja A. S pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj višini H_T in H_B.



Slika 1: Opazovanja za določitev višin reperjev T in B

Rešitev s postopkom pogojne izravnave po MNK

Postopek pogojne izravnave sledi korakom iz datoteke *PogojnaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Pri tej nalogi bomo prvo nastavili vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in pripadajočo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$. Iz podatkov vidimo, da imamo 5 opazovanj, vektor $\mathbf{l}$ sestavimo tako, da dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih. Dobimo:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ b \\ \beta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\hspace{1.5em}}\,\mathrm{m} \\ \underline{\hspace{1.5em}} \\ \underline{\hspace{1.5em}}\,\mathrm{m} \\ \underline{\hspace{1.5em}} \\ \underline{\hspace{1.5em}}\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ bomo dobili tako, da bomo prvo sestavili varianсno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$, kjer bomo natančnosti za dolžinske količine predstavili v metrih, za kotne pa v radianih. Če bomo izbrali za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$, potem bodo kofaktorji opazovanj enaki:

$$q_a = \underline{\hspace{1.5em}} \quad q_\alpha = \underline{\hspace{1.5em}} \quad q_b = \underline{\hspace{1.5em}} \quad q_\beta = \underline{\hspace{1.5em}} \quad q_z = \underline{\hspace{1.5em}} \tag{2}$$

Vrednosti iz enačbe 2 uporabimo za sestavo matrike $\mathbf{Q}$ tako, da jih postavimo po diagonali matrike.

Naslednja stvar, ki jo moramo določiti, pa so n, n_0 in r. Prvo se bomo osredotočili na n_0, torej na minimalno število opazovanj, za rešitev problema, to je določitev višin reperjev T in B. Iz slike 1 vidimo, da bi lahko višini H_T in H_B dobili, če bi uporabili a, α in z, torej 3 opazovanja. Po drugi strani, pa bi lahko uporabili tudi a, α, b in β, kar pa pomeni 4 opazovanja. Vprašanje se pojavi, kaj je pravilno, 3 ali 4?

Izkaže se, da moramo na opazovanja gledati malo drugače. Ker določamo višine reperjev, vidimo, da z dejansko predstavlja višinsko razliko, medtem ko višinski razliki predstavljata samo para: a in α ter b in β. Povedano drugače, a brez α in b brez β ne poda možnosti določitve višinske razlike, zato je potrebno dolžino in višinski kot vedno obravnavati skupaj. Na ta način lahko vidimo, da imamo dejansko 3 opazovanja, ki predstavljajo višinsko razliko, to so: z, par (a,α) in par (b,β).

Če pa opazovanja obravnavamo na ta način, pa vidimo, da imamo $n = 3$, za n_0 pa bomo vedno dobili 2, torej $r = 1$. Ampak taka obravnava se nanaša le tu, da dobimo pravi število pogojih enačb (r). V nadaljevanju bo število opazovanj še vedno $n = 5$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
Število pogojnih enačb je torej $r =$ __, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Za sestavo enačbe izhajamo iz slike 1, kjer vidimo, da mora veljati:
$$F \equiv \hat{a}\tan\hat{\alpha} + \hat{z} - \hat{b}\tan\hat{\beta} = 0 \tag{3}$$
V enačbi 3 količina $\hat{a}\tan\hat{\alpha}$ predstavlja višinsko razliko Δh_A^T, količina $\hat{b}\tan\hat{\beta}$ pa višinsko razliko Δh_B^T.

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti _ $\times$ _. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial a} & \frac{\partial F}{\partial \alpha} & \frac{\partial F}{\partial b} & \frac{\partial F}{\partial \beta} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{4}$$
Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti _ $\times$ _, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz 3 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:
$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(a\tan\alpha + z - b\tan\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{5}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj

$\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti _ × _. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti _ × _, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{QA}^\mathrm{T}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_\alpha \\ v_b \\ v_\beta \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

V enačbi 9 sta popravka v_α in v_β podana v radianih. Zapišemo jih lahko tudi kot $v_\alpha = \_'\_''$ in $v_\beta = \_'\_''$.

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1 in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe 9:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Tudi v enačbi 10 sta izravnana kota $\hat{\alpha}$ in $\hat{\beta}$ podana v radianih. Zapišemo ju lahko tudi kot $\hat{\alpha} = \_^\circ\_'\_''$ in $\hat{\beta} = \_^\circ\_'\_''$.

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Za kontrolo v pogojne enačbe 3 vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe 10 in dobimo:

$$\hat{a}\tan\hat{\alpha} + \hat{z} - \hat{b}\tan\hat{\beta} = 5.60 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \tag{11}$$

Vidimo, da je odstopanje na desni strani enačbe majhno, nove iteracije ni potrebno izvesti.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Na koncu iz izravnanih opazovanj(enačba 10) in dane višine reperja A ($H_A = 320.00\,\mathrm{m}$) izračunamo še višine reperjev T in B:

$$\begin{bmatrix} H_T \\ H_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\mathrm{m} \\ \underline{\quad}\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{12}$$