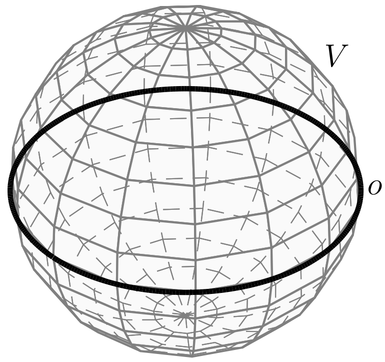
Pogojna izravnava po MNK – Opazovanja v krogli:

Imamo kovinsko kroglo, za katero želimo določiti pomer r, zato smo z merskim trakom izmerili obseg $o = 78\,\mathrm{cm}$ z natančnostjo $\sigma_o = 0.5\,\mathrm{cm}$. Kroglo smo potopili v vodo in izmerili prostornino izpodrinjene tekočine, ki znaša $V = 8.2\,\mathrm{L}$, z natančnostjo $\sigma_V = 1.0\,\mathrm{cL}$. Situacijo prikazuje slika 1. S pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi polmer krogle r.



Slika 1: Obravnavana krogla in prikaz izmerjenih opazovanj

Rešitev s postopkom pogojne izravnave po MNK

Postopek pogojne izravnave sledi korakom iz datoteke *PogojnaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Glede na problem (krogla) in podatke v navodilih, vidimo, da imamo $n =$ ___, $n_0 =$ ___, $r =$ ___. Opazovanji sta podani v enotah, ki nista skladni (cm in L), zato jih zapišem v istem/skladnem merilu, v dm za obseg in L za prostornino. Dobimo:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} o \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{dm} \\ \_\_\mathrm{L} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Ker so opazovanja različne natančnosti, moramo prvo sestaviti kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$, ki je velikosti _ $\times$ _. Tudi tu pazimo na enote, ki morajo biti enake kot pri vektorju opazvanj iz enačbe 1. Dobimo:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_o^2 & 0 \\ 0 & \sigma_V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

   Za najbolj enostavno matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$, bomo izbrali tako referenčno varianco a-priori σ_0^2, da bodo vrednosti v matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}$ sama cela števila (najmanjša možna). Izberemo si:

$$\sigma_0^2 = \_\_ \tag{3}$$

   Matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ je potem enaka:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{4}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r = \_\_$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. V pogojni enačbi moramo povezati obseg krogle o in prostornino V, kjer za obe količini velja:
$$o = 2\pi r \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{5}$$
   Če iz leve enačbe v enačbi 5 izrazimo r in ga vstavimo v desno enačbo, dobimo:
$$r = \frac{o}{2\pi} = \quad \rightarrow \quad V = \frac{4}{3}\pi\frac{o^3}{8\pi^3} = \frac{o^3}{6\pi^2} \tag{6}$$
   Na osnovi desne enačbe iz 6 sestavimo pogojno enačbo:
$$F_1 \equiv 6\pi^2\hat{V} - \hat{o}^3 = 0 \tag{7}$$

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Vektor popravkov $\mathbf{v}$ ima, glede na vektor opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1 obliko:
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_o \\ v_V \end{bmatrix} \tag{8}$$
   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti $\_ \times \_$. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial o} & \frac{\partial F_1}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{9}$$
   Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti $\_ \times \_$, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz 7 prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:
$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(6\pi^2 V - o^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{L} \end{bmatrix} \tag{10}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti $\_ \times \_$. Dobimo:
$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{11}$$
   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:
$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{12}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti _ × _, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_ \end{bmatrix} \tag{13}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \_\mathrm{dm} \\ \_\mathrm{L} \end{bmatrix} \tag{14}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe 1 in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe 14:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{dm} \\ \_\_\mathrm{L} \end{bmatrix} \tag{15}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Ker so pogojne enačbe nelinearne, smo z linearizacijo povzročili neskladnost/napako v funkcionalnem modelu. Kakšno je to neskladje, lahko ugotovimo tako, da v enačbe popravkov 7 vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe 15 in dobimo:

$$6\pi^2\hat{V} - \hat{o}^3 = -0.08\,\mathrm{L} \tag{16}$$

   Vrednost neskladja v enačbi 16 je majhna, zato rezultati 2. iteracije ne bodi prinesli bistvenega izboljšanja.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Izračunajmo še polmer krogle r:

$$r = \frac{\hat{o}}{2\pi} = \_\_\mathrm{dm} \tag{17}$$