Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Študijski program 1. stopnje

Geodezija in geoinformatika, 1. letnik

IZRAVNALNI RAČUN 1 - VAJE
Pogojna izravnava po MNK

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Različica: 11. februar 2026

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Kazalo preglednic

1 Pogojna izravnava po MNK

Na enak način, kot lahko poenostavimo in posplošimo posredno metodo MNK, naredimo tudi z direktno metodo. Rezultat je pogojna izravnava po MNK. In tudi tu bo **posplošitev** dana z dejstvom, da enakovredno lahko rešujemo tako linearne kot tudi nelinearne probleme, kakor bo tudi **poenostavitev** dana z dejstvom, da vse probleme rešimo po enakem postopku - matrično.

Tudi pri pogojni izravnavi po MNK bomo vse količine vodili v vektorski obliki. Imeli bomo vektor opazovanj $\mathbf{l}$, vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$, vsi vektorji pa so velikosti $n \times 1$. Vektorju opazovanj pripada variančno-kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$, s pomočjo katere na osnovi izbrane referenčne variance a-priori σ_0^2 izračunamo matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in naknadno še matriko uteži $\mathbf{P}$. Vse matrike stohastičnega modela so velikosti $n \times n$.

1.1 Pogojne enačbe

Pri pogojni izravnavi moramo sestaviti r pogojnih enačb, povedano drugače, vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča podati en pogoj, ki mu morajo opazovanja zadostiti. Pogojne enačbe imajo enako vlogo (in obliko) kot pogojne enačbe pri direktni metodi MNK. V splošnem bodo pogojne enačbe nelinearne, zapisali pa jih bomo tako, da se vsi elementi pogojnih enačb nahajajo le na levi strani enačaja, na desni strani ostane samo še vrednost 0. Tudi tu bomo videli, da ta pogoj ni nujen, a nam bo olajšal izračun pravih predznakov parcialnih odvodov v nadaljevanju. Pogojne enačbe imajo obliko:

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv g_1(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n) = 0 \\
F_2 &\equiv g_2(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n) = 0 \\
F_3 &\equiv g_3(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n) = 0 \\
\vdots & \qquad \vdots \\
F_r &\equiv g_r(\hat{l}_1, \hat{l}_2, \ldots, \hat{l}_n) = 0
\end{aligned}
\tag{1–1}
$$

Pravila za sestavo pogojnih enačb so povsem enaka kot pri direktni metodi MNK (glej pod-poglavje *Direktna metoda po MNK* poglavja *Metoda najmanjših kvadratov (sistem enačb)*), enačbe vsebujejo le izravnana opazovanja in konstante, v vseh enačbah moramo uporabiti vsa opazovanja[1]. Število opazovanj v posamezni pogojni enačbi je poljubno in je odvisno od oblike enačbe (funkcionalnega modela). Za rešitev pogojne izravnave po MNK, moramo nelinearne pogojne enačbe prvo pretvoriti v sistem linearnih enačb na osnovi postopka linearizacije.

1.2 Linearizacija pogojnih enačb

Ker so pogojne enačbe v enačbah (1–1) nelinearne, jih lineariziramo. Razlogi za prehod v linearno obliko so povsem enaki, kot pri posredni izravnavi po MNK (glej poglavje *Posredna izravnava po MNK*).

Za prehod v linearno obliko, bomo spet uporabili Taylorjevo vrsto. V pogojnih enačbah nastopajo izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, za katera pa vemo, da so vsota merjenih vrednosti opazovanj in njihovih popravkov, torej $\hat{l}_i = l_i + v_i$. Pogojne enačbe zato razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli

[1] Sedaj že vemo, da obstajajo primeri, ko nekaterih opazovanj ne moremo uporabiti v pogojnih enačbah. To bomo pojasnili pri posebnih primerih

merjenih vrednosti opazovanj l_i, kjer prirastek opazovanj predstavljajo ravno popravki opazovanj v_i, pri tem pa zanemarimo člene s potencami popravkov 2 in več. Poljubna (i-ta) pogojna enačba se linearizira na sledeč način:

$$F_i \equiv g_i(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \frac{\partial F_i}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial F_i}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial l_n} v_n = 0 \tag{1–2}$$

Enačbo (1–2) bomo preuredili tako, da bomo na levi strani pustili tiste količine, ki jih ne poznamo (so rezultat pogojne izravnave), to so popravki opazovanj, na desno stran pa bomo dali vse ostalo kar poznamo ali lahko izračunamo, to so opazovanja in/ali izračunane funkcije (g_i) na osnovi merjenih vrednosti opazovanj. Preurejena linearizirana pogojna enačba je oblike:

$$F_i \equiv \frac{\partial F_i}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial F_i}{\partial l_2} v_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial l_n} v_n = -g_i(l_1, l_2, \ldots, l_n) \tag{1–3}$$

Enačba (1–3) je linearna, saj so popravki opazovanj pomnoženi le s konstantami (parcialni odvodi $\frac{\partial F_i}{\partial l_j}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) so izračunani z merjenimi vrednostmi opazovanj in so konstante). Enačbo zapišemo v matrični obliki, isto pa naredimo tudi za vse ostale linearizirane pogojne enačbe iz (1–1) in dobimo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial l_1} & \frac{\partial F_1}{\partial l_2} & & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial l_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial l_1} & \frac{\partial F_2}{\partial l_2} & & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial l_n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial l_1} & \frac{\partial F_i}{\partial l_2} & & \ddots & \frac{\partial F_i}{\partial l_n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial l_1} & \frac{\partial F_r}{\partial l_2} & & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial l_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix} \tag{1–4}$$

Matrično enačbo (1–4) lahko v krajši obliki, z ustreznimi oznakami matrik, zapišemo kot:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f} \tag{1–5}$$

V enačbi (1–5) sta dva elementa, ki ju je potrebno še definirati, in sicer:

A matrika koeficientov (parcialnih odvodov) pogojnih enačb, izračunanih iz merjenih vrednosti opazovanj, velikosti $r \times n$, in

f vektor odstopanj (prostih členov) pogojnih enačb, velikosti $r \times 1$.

Glede na obliko elementov vektorja **f** iz enačbe (1–3) vidimo, da so odstopanja pogojnih enačb ravno negativne vrednosti funkcij g_i, izračunanih iz merjenih vrednosti opazovanj, torej $f_i = -g_i$.

1.3 Rešitev pogojne izravnave po MNK

Za rešitev pogojne izravnave po MNK izhajamo iz osnovnega matričnega modela pogojne izravnave iz enačbe (1–5), kar predstavlja funkcionalni model pogojne izravnave. Vendar matrična enačba iz (1–5) ni enolično rešljiva, saj predstavlja r enačb, v kateri nastopa n popravkov (seveda $r < n$). Takemu sistemu rečemo pod-določen sistem. Dodaten pogoj, ki nam bo podal enolično rešitev je pogoj metode najmanjših kvadratov, predstavljen v karakteristični funkciji Φ:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} \Rightarrow \min. \tag{1–6}$$

kjer dodatno velja enačba (1–5). Karakteristična funkcija, ki bo upoštevala pogoj (1–6) in (1–5) ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{f}\right) \Rightarrow \min. \tag{1–7}$$

V enačbi (1–7) vektor **k** označimo kot **vektor korelat** in vsebuje r Lagrangejevih multiplikatorjev, za vsako pogojno enačbo en multiplikator[2]. Ekstrem funkcije (1–7) bomo dobili takrat, ko bomo rešili dva sistema:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}} = 0 \tag{1–8}$$

Rešitev pogojne izravnave, oziroma rešitev matričnih sistemov (1–8) je podan z nizom matričnih enačb. Prvo izračunamo **matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj** $\mathbf{Q}_e$ in **matriko uteži ekvivalentnih enačb/opazovanj** $\mathbf{P}_e$, obe velikosti $r \times r$:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} \tag{1–9}$$

Sledi izračun vektorja korelat **k**:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} \tag{1–10}$$

Iz česar izračunamo rešitev pogojne izravnave oz. funkcionalnega modela pogojne izravnave, to sta vektorja:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{1–11}$$

Iz enačb izračuna funkcionalnega modela pogojne izravnave (1–9), (1–10) in (1–11) vidimo, da v enačbah nastopa matrika kofaktorjev opazovanj **Q** in ne matrika uteži opazovanj **P**.

1.4 Postopek izvedbe pogojne izravnave po MNK

Postopek reševanja nalog s pogojno izravnavo poteka zelo podobno kot postopek pri direktni metodi MNK, le da bomo tu izračune delali v matrični obliki. V nadaljevanju so predstavljeni koraki pogojne izravnave.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj **l** in matriko kofaktorjev opazovanj **Q**. Nastavimo n, n_0 in r.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe. Pravila za sestavo pogojnih enačb so podana v poglavju pod-poglavju *Direktna metoda po MNK* poglavja *Metoda najmanjših kvadratov (sistem enačb)*. Dodatno pravilo, ki je pri pogojni izravnavi zelo pomembno, pa je, da so pogojne enačbe sestavljene tako, da se celotna enačba nahaja le na levi strani enačaja. Desna stran naj ima samo še vrednost 0.

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$. Izračunamo vse parcialne odvode in tako nastavimo matriko **A**. Izračunamo vsa odstopanja pogojnih enačb in nastavimo vektor **f**.

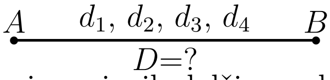
4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.

[2] Lagrangejeve multiplikatorje boste podrobno spoznali pri matematiki, ko boste obravnavali vezan ekstrem funkcije več spremenljivk

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave. Drugo iteracijo naredimo tako, da za merjene vrednosti opazovanj $\mathbf{l}$ uporabimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ in postopek ponovimo, od alineje 3 naprej.
9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem. Pri pogojni izravnavi je to pogosto, saj nas v večini primerov izravnana opazovanja sama po sebi ne zanimajo, ampak izvedene količine (koordinate, višine, površine…)

1.5 Primer 1 - Dolžina D merjena štirikrat

Določiti želimo razdaljo D med točkama A in B, zato smo z merskim trakom dolžino izmerili štirikrat, kot prikazuje slika 1–1. Opazovanja, ki smo jih dobili so: $d_1 = 32{,}51\,\mathrm{m}$, $d_2 = 32{,}48\,\mathrm{m}$, $d_3 = 32{,}52\,\mathrm{m}$ in $d_4 = 32{,}53\,\mathrm{m}$.



Slika 1–1: Prikaz izmerjenih dolžin med točkama A in B

Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi vrednost neznane dolžine D.

Primer bomo s pogojno izravnavo rešili po korakih, ki so predstavljeni v poglavju 1.4.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Glede na podatke naloge, vidimo, da imamo $n = 4$ opazovanih dolžin, kjer bi za enolično določitev dolžine D potrebovali le $n_0 = 1$ opazovanje. Število nadštevilnih opazovanj je tako $r = 3$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ ima obliko:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}48\,\mathrm{m} \\ 32{,}52\,\mathrm{m} \\ 32{,}53\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–12}$$
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, je matrika kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ enotska matrika, velikosti 4×4.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb, ki jih moramo nastaviti je enako $r = 3$, v katerih lahko nastopajo le (izravnana) opazovanja (in konstante), v vseh pogojnih enačbah pa moramo uporabiti vsa opazovanja. Pogoj, iz katerega izhajamo je:
   $$D = \hat{d}_1 = \hat{d}_2 = \hat{d}_3 = \hat{d}_4 \tag{1–13}$$
   Enačbo (1–13) uporabimo za sestavo pogojnih enačb, ki imajo obliko:
   $$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{d}_2 - \hat{d}_1 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{d}_3 - \hat{d}_1 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d}_4 - \hat{d}_1 = 0 \end{aligned} \tag{1–14}$$
   Kot smo pokazali že pri direktni metodi MNK (glej rešen primer trikrat merjenega kota po direktni metodi v poglavju *Metoda najmanjših kvadratov (sistem enačb)*), to ni edini niz pogojnih enačb, a vsebujejo vse informacije, ki jih potrebujemo za izvedbo pogojne izravnave.

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{f}$.
   Vektor popravkov $\mathbf{v}$ ima, glede na vektor opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–12) obliko:
   $$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{1–15}$$

Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 3×4. Število vrstic je enako številu enačb (3), medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj (4). Matrika vsebuje parcialne odvode, kjer vsako pogojno enačbo iz enačbe (1–14) odvajamo po vseh opazovanjih, po vrstnem redu iz vektorja opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–12). Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial d_1} & \frac{\partial F_1}{\partial d_2} & \frac{\partial F_1}{\partial d_3} & \frac{\partial F_1}{\partial d_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial d_1} & \frac{\partial F_2}{\partial d_2} & \frac{\partial F_2}{\partial d_3} & \frac{\partial F_2}{\partial d_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial d_1} & \frac{\partial F_3}{\partial d_2} & \frac{\partial F_3}{\partial d_3} & \frac{\partial F_3}{\partial d_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–16}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 3×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–14) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(d_2 - d_1) \\ -(d_3 - d_1) \\ -(d_4 - d_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}03\,\mathrm{m} \\ -0{,}01\,\mathrm{m} \\ -0{,}02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–17}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 3×3. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1–18}$$

   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix} \tag{1–19}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 3×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0{,}03\,\mathrm{m} \\ -0{,}01\,\mathrm{m} \\ -0{,}02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–20}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}03\,\mathrm{m} \\ -0{,}01\,\mathrm{m} \\ -0{,}02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–21}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj **l** iz enačbe (1–12) in vektorja popravkov opazovanj **v** iz enačbe (1–21):

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}51\,\mathrm{m} \\ 32{,}51\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–22}$$

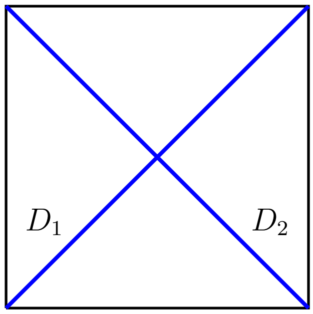
8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Primer je linearen in enostaven, zato ni potrebno po izvajanju še ene iteracije.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Končen rezultat je izračun neznane dolžine D, ki jo dobimo iz pogoja v enačbi (1–13) in izravnanih opazovanj iz enačbe (1–22). Dobimo:

$$D = \hat{d}_1 = \hat{d}_2 = \hat{d}_3 = \hat{d}_4 = 32{,}51\,\mathrm{m} \tag{1–23}$$

1.6 Primer 2 - Diagonala kvadrata merjena dvakrat

V kvadratu smo izmerili diagonalo dvakrat, kot prikazuje slika 1–2, in dobili $D_1 = 5{,}2\,\mathrm{m}$ ter $D_2 = 5{,}1\,\mathrm{m}$.



Slika 1–2: Skica kvadrata in opazovanih diagonal v kvadratu

Če so opazovanja različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0{,}2\,\mathrm{m}$, in medseboj nekorelirana, s pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja. Izračunaj tudi velikost stranice a in površino S kvadrata.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz navodil vidimo, da imamo $n = 2$ opazovani diagonali, kjer bi za enolično določitev velikosti kvadrata potrebovali le $n_0 = 1$ opazovanje. Število nadštevilnih opazovanj je tako $r = 1$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ ima obliko:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}2\,\mathrm{m} \\ 5{,}1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–24}$$
   Ker so opazovanja različne natančnosti, moramo prvo sestaviti kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$, ki je velikosti 2×2 in ima obliko:
   $$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}01\,\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 0{,}04\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–25}$$
   Pri pogojni izravnavi uporabljamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$, zato bomo izbrali tako referenčno varianco a-priori σ_0^2, da bodo vrednosti v matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}$ sama cela števila (najmanjša možna). Izberemo si:
   $$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 0{,}01\,\mathrm{m}^2 \tag{1–26}$$
   Matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ dobimo kot:
   $$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{1–27}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb, ki jih moramo nastaviti je enako $r = 1$, v katerih lahko nastopajo le (izravnana) opazovanja (in konstante), v vseh pogojnih enačbah pa moramo uporabiti vsa opazovanja. Pogoj, iz katerega izhajamo je:
   $$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \tag{1–28}$$
   Enačbo (1–28) uporabimo za sestavo pogojne enačbe, ki ima obliko:
   $$F_1 \equiv \hat{D}_1 - \hat{D}_2 = 0 \tag{1–29}$$
   V pogojni enačbi (1–29) smo, glede na enačbo (1–28), vse elemente dali na levo stran.

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Vektor popravkov $\mathbf{v}$ ima, glede na vektor opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–24) obliko:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{1–30}$$

   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov enačb popravkov po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 1×2. Število vrstic je enako številu enačb (1), medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj (2). Matrika vsebuje parcialne odvode, enačbe (1–28) po obeh opazovanjih, po vrstnem redu iz vektorja opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–24). Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial D_1} & \frac{\partial F_1}{\partial D_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1–31}$$

   Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 1×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–29) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. V našem primeru dobimo eno samo vrednost, in sicer:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(D_1 - D_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–32}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), samo še izračunamo rešitve izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 1×1. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \tag{1–33}$$

   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}20 \end{bmatrix} \tag{1–34}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 1×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0{,}02\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–35}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{QA}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -0{,}02\,\mathrm{m} \\ 0{,}08\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–36}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–24) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–36):

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5{,}18\,\mathrm{m} \\ 5{,}18\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–37}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Primer je linearen in enostaven, zato ni potrebno po izvajanju še ene iteracije.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Na koncu lahko izračunamo še stranico kvadrata a, kjer izhajamo iz izravnanih opazovanj v enačbi (1–37):

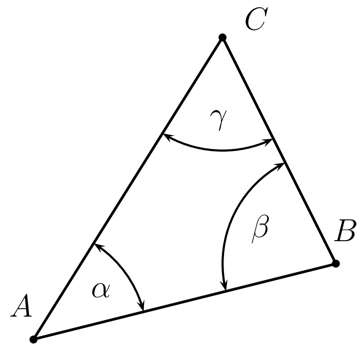
$$a = \frac{\hat{D}_1}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{D}_2}{\sqrt{2}} = 3{,}663\,\mathrm{m} \tag{1–38}$$

   in še površino kvadrata S:

$$S = a^2 = \frac{\hat{D}_1^2}{2} = \frac{\hat{D}_2^2}{2} = 13{,}4162\,\mathrm{m}^2 \tag{1–39}$$

1.7 Primer 3 - Merjeni vsi koti trikotnika

V trikotniku smo izmerili vse tri notranje kote in dobili: $\alpha = 41°33'$, $\beta = 78°57'$ in $\gamma = 59°27'$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja.



Slika 1–3: Skica trikotnika in vseh notranjih kotov

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz navodil vidimo, da imamo $n = 3$, $n_0 = 2$, $r = 1$ in:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41°33' \\ 78°57' \\ 59°27' \end{bmatrix} \tag{1–40}$$
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, je matrika kofaktorjev $\mathbf{Q}$ enaka:
   $$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–41}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r = 1$, v kateri nastopajo le izravnana opazovanja in konstanta (katera je tu konstanta?). Pogoj, ki velja za naša opazovanja, je seveda:
   $$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180° \tag{1–42}$$
   Pogoj iz enačbe (1–42) uporabimo za sestavo pogojne enačbe, ki je:
   $$F_1 \equiv \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} - 180° = 0 \tag{1–43}$$

3. Linearizamo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Vektor popravkov $\mathbf{v}$ ima, glede na vektor opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–40) obliko:
   $$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} \tag{1–44}$$
   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 1×3. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–45}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 1×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–43) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \left[-(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) \right] = \left[\; 3{,}0' \; \right] \tag{1–46}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 1×1. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left[3 \right] \tag{1–47}$$

   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \left[\; 0{,}333 \; \right] \tag{1–48}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 1×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e \mathbf{f} = \left[\; 1{,}0' \; \right] \tag{1–49}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1{,}0' \\ 1{,}0' \\ 1{,}0' \end{bmatrix} \tag{1–50}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–40) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–50):

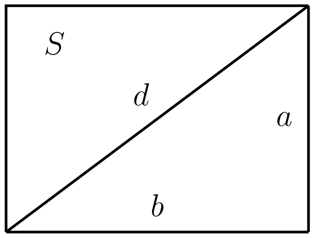
$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 41^\circ 34{,}0' \\ 78^\circ 58{,}0' \\ 59^\circ 28{,}0' \end{bmatrix} \tag{1–51}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Primer je linearen in enostaven, zato ni potrebno po izvajanju še ene iteracije.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Naloga ne zahteva nobenega dodatnega izračuna.

1.8 Primer 4 - Opazovanja v pravokotniku

V pravokotniku imamo merjene štiri količine, kakor prikazuje slika 1–4, in sicer stranico $a = 6{,}0\,\mathrm{m}$, stranico $b = 8{,}0\,\mathrm{m}$ in diagonalo $d = 10{,}1\,\mathrm{m}$. Dodatno smo izmerili tudi površino $S = 48{,}4\,\mathrm{m}^2$. Izravnajte opazovanja s pogojno izravnavo po metodi najmanjših kvadratov, če so dolžinske količine merjene z natančnostjo $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_d = 1\,\mathrm{cm}$ in površina merjena z natančnostjo $\sigma_S = 10\,\mathrm{dm}^2$.



Slika 1–4: Skica pravokotnika z opazovanji

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz navodil vidimo, da imamo $n = 4$, $n_0 = 2$, $r = 2$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}0\,\mathrm{m} \\ 8{,}0\,\mathrm{m} \\ 10{,}1\,\mathrm{m} \\ 48{,}4\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–52}$$

   Ker so opazovanja različne natančnosti, moramo prvo sestaviti kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$, ki je velikosti 4×4 in ima obliko:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0001\,\mathrm{m}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0001\,\mathrm{m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0001\,\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0100\,\mathrm{m}^4 \end{bmatrix} \tag{1–53}$$

   Pri pogojni izravnavi uporabljamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$, zato bomo izbrali tako referenčno varianco a-priori σ_0^2, da bodo vrednosti v matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}$ sama cela števila (najmanjša možna). Izberemo si:

$$\sigma_0^2 = \sigma_a^2 = 0{,}0001\,\mathrm{m}^2 \tag{1–54}$$

   Matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ dobimo kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \tag{1–55}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r = 2$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Primer pogojnih enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{d}^2 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}\hat{b} - \hat{S} = 0 \end{aligned} \tag{1–56}$$

3. Linearizamo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Vektor popravkov $\mathbf{v}$ ima, glede na vektor opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–52) obliko:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_d \\ v_S \end{bmatrix} \tag{1–57}$$

   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 2×4. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial d} & \frac{\partial F_1}{\partial S} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial d} & \frac{\partial F_2}{\partial S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}0 & 16{,}0 & -20{,}2 & 0{,}0 \\ 8{,}0 & 6{,}0 & 0{,}0 & -1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–58}$$

   Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 2×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–56) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(a^2 + b^2 - d^2) \\ -(ab - S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}01\,\mathrm{m}^2 \\ 0{,}40\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–59}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 2×2. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 808 & 192 \\ 192 & 200 \end{bmatrix} \tag{1–60}$$

   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}00160 & -0{,}00154 \\ -0{,}00154 & 0{,}00648 \end{bmatrix} \tag{1–61}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 2×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0{,}00261 \\ -0{,}00050 \end{bmatrix} \tag{1–62}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{QA}^\mathrm{T}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0{,}0273\,\mathrm{m} \\ 0{,}0387\,\mathrm{m} \\ -0{,}0527\,\mathrm{m} \\ 0{,}0503\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–63}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–52) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–63):

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6{,}0273\,\mathrm{m} \\ 8{,}0387\,\mathrm{m} \\ 10{,}0473\,\mathrm{m} \\ 48{,}4503\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–64}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Ker so pogojne enačbe nelinearne, smo z linearizacijo povzročili neskladnost/napako v funkcionalnem modelu. Kakšno je to neskladje, lahko ugotovimo tako, da v enačbe popravkov (1–56) vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe (1–64) in dobimo:

$$\begin{aligned} \hat{a}^2 + \hat{b}^2 - \hat{d}^2 &= -0{,}0005\,\mathrm{m}^2 \\ \hat{a}\hat{b} - \hat{S} &= 0{,}0011\,\mathrm{m}^2 \end{aligned} \tag{1–65}$$

   Iz enačbe (1–65) je razvidno, da je skladnost izravnanih opazovanj visoka. Kako pa se to odraža na velikostih popravkov v 2. iteraciji? Če izravnana opazovanja iz enačbe (1–64) uporabimo kot merjene vrednosti in ponovimo pogojno izravnavo, dobimo sledeče popravke opazovanj:

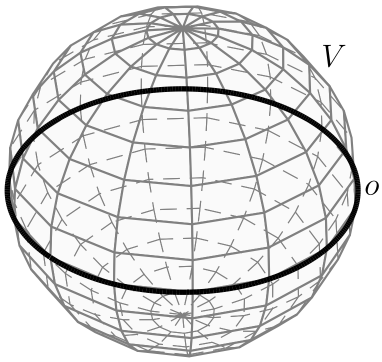
$$\mathbf{v}_{2i} = \begin{bmatrix} -3{,}15 \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\ -6{,}01 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \\ -5{,}02 \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\ 7{,}66 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–66}$$

   Popravki 2. iteracije iz enačbe (1–66) so dejansko zanemarljivi, zato druge iteracije ni potrebno izvesti.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Naloga ne zahteva nobenega dodatnega izračuna.

1.9 Primer 5 - Opazovanja v krogli

Imamo kovinsko kroglo, za katero želimo določiti pomer r, zato smo z merskim trakom izmerili obseg $o = 78\,\mathrm{cm}$ z natančnostjo $\sigma_o = 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Kroglo smo potopili v vodo in izmerili prostornino izpodrinjene tekočine, ki znaša $V = 8{,}2\,\mathrm{L}$, z natančnostjo $\sigma_V = 1{,}0\,\mathrm{cL}$. Situacijo prikazuje slika 1–5. S pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi polmer krogle r.



Slika 1–5: Obravnavana krogla in prikaz izmerjenih opazovanj

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Glede na problem (krogla) in podatke v navodilih, vidimo, da imamo $n = 2$, $n_0 = 1$, $r = 1$. Opazovanji sta podani v enotah, ki nista skladni (cm in L), zato jih zapišem v istem/skladnem merilu, v dm za obseg in L za prostornino. Dobimo:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} o \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}8\,\mathrm{dm} \\ 8{,}2\,\mathrm{L} \end{bmatrix} \tag{1–67}$$

   Ker so opazovanja različne natančnosti, moramo prvo sestaviti kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$, ki je velikosti 2×2. Tudi tu pazimo na enote, ki morajo biti enake kot pri vektorju opazvanj iz enačbe (1–67). Dobimo:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_o^2 & 0 \\ 0 & \sigma_V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0025\,\mathrm{dm}^2 & 0 \\ 0 & 0{,}0001\,\mathrm{L}^2 \end{bmatrix} \tag{1–68}$$

   Za najbolj enostavno matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$, bomo izbrali tako referenčno varianco a-priori σ_0^2, da bodo vrednosti v matriki kofaktorjev $\mathbf{Q}$ sama cela števila (najmanjša možna). Izberemo si:

$$\sigma_0^2 = \sigma_V^2 = 0{,}0001\,\mathrm{L}^2 \tag{1–69}$$

   Matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ je potem enaka:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–70}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r = 1$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. V pogojni enačbi moramo povezati obseg krogle o in prostornino V, kjer za obe količini velja:

$$o = 2\pi r \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{1–71}$$

Če iz leve enačbe v enačbi (1–71) izrazimo r in ga vstavimo v desno enačbo, dobimo:

$$r = \frac{o}{2\pi} = \quad \rightarrow \quad V = \frac{4}{3}\pi\frac{o^3}{8\pi^3} = \frac{o^3}{6\pi^2} \tag{1–72}$$

Na osnovi desne enačbe iz (1–72) sestavimo pogojno enačbo:

$$F_1 \equiv 6\pi^2\hat{V} - \hat{o}^3 = 0 \tag{1–73}$$

3. Linearizamo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Vektor popravkov $\mathbf{v}$ ima, glede na vektor opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–67) obliko:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_o \\ v_V \end{bmatrix} \tag{1–74}$$

Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 1×2. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial o} & \frac{\partial F_1}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -182{,}520 & 59{,}218 \end{bmatrix} \tag{1–75}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 1×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–73) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(6\pi^2 V - o^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11{,}033\,\mathrm{L} \end{bmatrix} \tag{1–76}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 1×1. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 836\,345{,}4873 \end{bmatrix} \tag{1–77}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}19568 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \tag{1–78}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 1×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1{,}31914 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \tag{1–79}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{QA}^\mathrm{T}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0{,}0602\,\mathrm{dm} \\ -0{,}0008\,\mathrm{L} \end{bmatrix} \tag{1–80}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–67) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–80):

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7{,}8602\,\mathrm{dm} \\ 8{,}1992\,\mathrm{L} \end{bmatrix} \tag{1–81}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
Ker so pogojne enačbe nelinearne, smo z linearizacijo povzročili neskladnost/napako v funkcionalnem modelu. Kakšno je to neskladje, lahko ugotovimo tako, da v enačbe popravkov (1–73) vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe (1–81) in dobimo:

$$6\pi^2\hat{V} - \hat{o}^3 = -0{,}08\,\mathrm{L} \tag{1–82}$$

Vrednost neskladja v enačbi (1–82) je majhna, zato rezultati 2. iteracije ne bodi prinesli bistvenega izboljšanja.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
Izračunajmo še polmer krogle r:

$$r = \frac{\hat{o}}{2\pi} = 1{,}251\,\mathrm{dm} \tag{1–83}$$

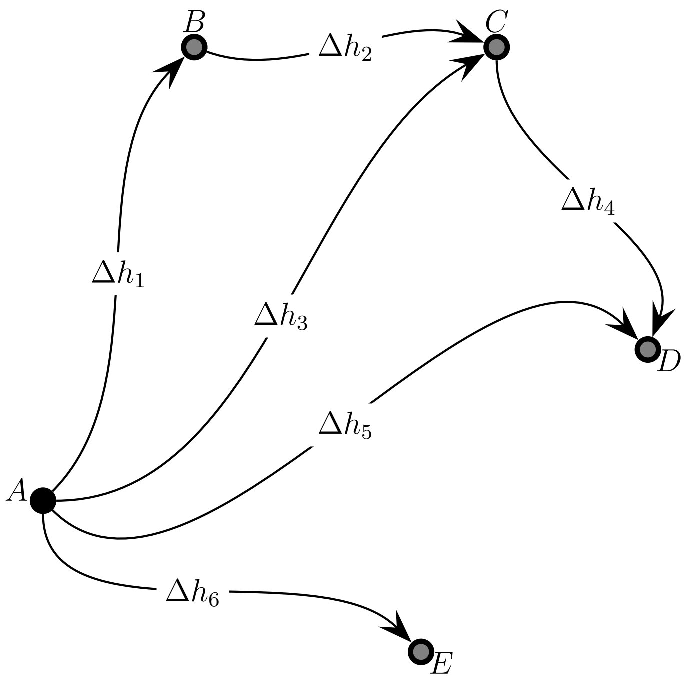
1.10 Primer 6 - Višinska geodetska mreža

V nivelmanski mreži, kjer je višina točke A dana ($H_A = 320{,}00\,\mathrm{m}$), smo opazovali višinske razlike in dolžine nivelmanskih linij, kakor jih prikazuje slika 1–6. Numerične vrednosti opazovanj so podane v preglednici 1–1.

Preglednica 1–1: Izmerjene vrednosti višinskih razlik med reperji

VIŠINSKA RAZLIKA	**DOLŽINA LINIJE**
$\Delta h_1 = 0{,}25\,\mathrm{m}$	$\overline{AB} = 10\,\mathrm{m}$
$\Delta h_2 = 0{,}30\,\mathrm{m}$	$\overline{BC} = 20\,\mathrm{m}$
$\Delta h_3 = 0{,}60\,\mathrm{m}$	$\overline{AC} = 40\,\mathrm{m}$
$\Delta h_4 = -0{,}15\,\mathrm{m}$	$\overline{CD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_5 = 0{,}40\,\mathrm{m}$	$\overline{AD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_6 = -0{,}15\,\mathrm{m}$	$\overline{AE} = 10\,\mathrm{m}$

S pogojno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite izravnane vrednosti višin reperjev B, C, D in E.



Slika 1–6: Opazovane višinske razlike v višinski geodetski mreži

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   V podani višinski mreži imamo opazovanih $n = 6$ višinskih razlik (opazovanj). Za enolično določitev višin novih reperjev potrebujemo $n_0 = 4$, torej je število nadštevilnih opazovanj enako

$r = 2$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ je torej:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25\,\mathrm{m} \\ 0{,}30\,\mathrm{m} \\ 0{,}60\,\mathrm{m} \\ -0{,}15\,\mathrm{m} \\ 0{,}40\,\mathrm{m} \\ -0{,}15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–84}$$

Ker imamo za vsako nivelmansko linijo podano dolžino te linije, so natančnosti opazovanj različne, uteži opazovanj pa so določene z:

$$p_i = \frac{1}{d_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{1–85}$$

Pri pogojni izravnavi moramo sestaviti matriko kofaktorjev $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$, kofaktor posameznega opazovanja q_i je določen kot:

$$q_i = \frac{1}{p_i} = d_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \tag{1–86}$$

Za enostavnejši izračun matrik, bomo kofaktorje zapisali tako, da bodo cela števila in najnižja možna. Dolžine moramo zato deliti s faktorjem 5.0, dobljeni kofaktorji vseh opazovanj pa so:

$$q_1 = 2{,}0 \quad q_2 = 4{,}0 \quad q_3 = 8{,}0 \quad q_4 = 3{,}0 \quad q_5 = 3{,}0 \quad q_6 = 2{,}0 \tag{1–87}$$

Vrednosti iz enačbe (1–87) uporabimo za sestavo matrike $\mathbf{Q}$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
Število pogojnih enačb je torej $r = 2$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Pogoje, katerim morajo zadoščati opazovanja, določimo s slike (1–6), dobimo pa jih tako, da zapiramo nivelmanske zanke. Primera dveh pogojnih enačb sta:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \Delta\hat{h}_1 + \Delta\hat{h}_2 - \Delta\hat{h}_3 = 0 \\ F_2 &\equiv \Delta\hat{h}_3 + \Delta\hat{h}_4 - \Delta\hat{h}_5 = 0 \end{aligned} \tag{1–88}$$

Iz enačb (1–88) je razvidno, da opazovanje Δh_6 v pogojnih enačbah ne nastopa. To v tem primeru ni napaka, saj ta višinska razlika ni vključena v nobeno zanko.

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 2×6. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_3} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_4} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_5} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta h_6} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_3} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_4} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_5} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta h_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1–89}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 2×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–88) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(\Delta h_1 + \Delta h_2 - \Delta h_3) \\ -(\Delta h_3 + \Delta h_4 - \Delta h_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}05\,\mathrm{m} \\ -0{,}05\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–90}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 2×2. Dobimo:
$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 14{,}0 & -8{,}0 \\ -8{,}0 & 14{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–91}$$
Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:
$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}106 & 0{,}061 \\ 0{,}061 & 0{,}106 \end{bmatrix} \tag{1–92}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 2×1, ki ima obliko:
$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0{,}00227 \\ -0{,}00227 \end{bmatrix} \tag{1–93}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:
$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 4{,}5\,\mathrm{mm} \\ 9{,}1\,\mathrm{mm} \\ -36{,}4\,\mathrm{mm} \\ -6{,}8\,\mathrm{mm} \\ 6{,}8\,\mathrm{mm} \\ 0{,}0\,\mathrm{mm} \end{bmatrix} \tag{1–94}$$
V enačbi (1–94) se vidi, da je popravek za zadnjo višinsko v_6 enak 0,0 mm, saj ta višinska razlika ni nadštevilno opazovana.

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–84) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–94):
$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}2545\,\mathrm{m} \\ 0{,}3091\,\mathrm{m} \\ 0{,}5636\,\mathrm{m} \\ -0{,}1568\,\mathrm{m} \\ 0{,}4068\,\mathrm{m} \\ -0{,}1500\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–95}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
Pri geometričnem nivelmanu so pogojne enačbe linearne, zato dodatne iteracije ni potrebno izvesti. Za kontrolo lahko v pogojne enačbe (1–88) vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe (1–95) in dobimo:
$$\begin{aligned} \Delta\hat{h}_1 + \Delta\hat{h}_2 - \Delta\hat{h}_3 &= 0{,}00\,\mathrm{mm} \\ \Delta\hat{h}_3 + \Delta\hat{h}_4 - \Delta\hat{h}_5 &= 0{,}00\,\mathrm{mm} \end{aligned} \tag{1–96}$$
Vidimo, da neskladja ni, izravnana opazovanja so povsem skladna, ponovne iteracije ni potrebno izvesti.

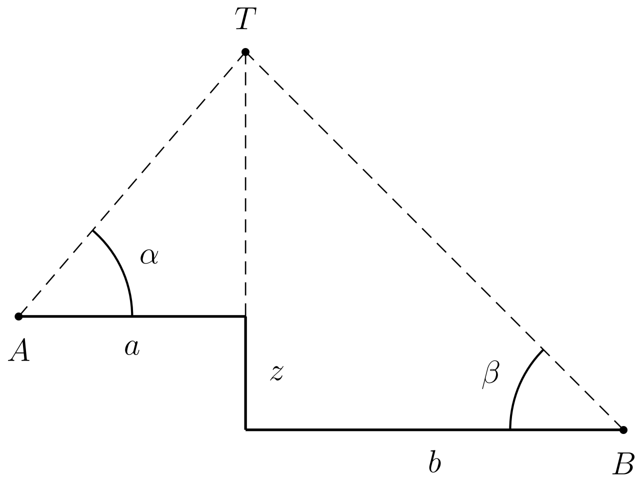
9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.

   Na koncu iz izravnanih opazovanj(enačba (1–95)) in dane višine reperja A ($H_A = 320{,}00\,\mathrm{m}$) izračunamo še višine reperjev B, C, D in E:

$$\begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320{,}2545\,\mathrm{m} \\ 320{,}5636\,\mathrm{m} \\ 320{,}4068\,\mathrm{m} \\ 319{,}8500\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–97}$$

1.11 Primer 7 - Višine reperjev

Dano imamo višino reperja A ($H_A = 320{,}00\,\text{m}$), želimo pa določiti višini reperjev T in B, zato smo izmerili opazovanja, kot jih prikazuje slika 1–7. Z reperja A smo do reperja T izmerili horizontalno dolžino $a = 15{,}0\,\text{m}$ ($\sigma_a = 0{,}05\,\text{m}$) in višinski kot $\alpha = 45°$ ($\sigma_\alpha = 5'$), z reperja B do reperja T horizontalno dolžino $b = 30{,}0\,\text{m}$ ($\sigma_b = 0{,}05\,\text{m}$) in višinski kot $\beta = 30°$ ($\sigma_\beta = 5'$) ter višinsko razliko $z = 2{,}4\,\text{m}$ ($\sigma_z = 0{,}05\,\text{m}$) od reperja B do reperja A. S pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj višini H_T in H_B.



Slika 1–7: Opazovanja za določitev višin reperjev T in B

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.

   Pri tej nalogi bomo prvo nastavili vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in pripadajočo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$. Iz podatkov vidimo, da imamo 5 opazovanj, vektor $\mathbf{l}$ sestavimo tako, da dolžinske količine podamo v metrih, kotne pa v radianih. Dobimo:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ b \\ \beta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15{,}0\,\text{m} \\ 0{,}7853982 \\ 30{,}0\,\text{m} \\ 0{,}5235988 \\ 2{,}4\,\text{m} \end{bmatrix} \tag{1–98}$$

   Matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ bomo dobili tako, da bomo prvo sestavili variančno-kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$, kjer bomo natančnosti za dolžinske količine predstavili v metrih, za kotne pa v radianih. Če bomo izbrali za referenčno varianco a-priori $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$, potem bodo kofaktorji opazovanj enaki:

$$q_a = 1\,181{,}81 \quad q_\alpha = 1{,}00 \quad q_b = 1\,181{,}81 \quad q_\beta = 1{,}00 \quad q_z = 1\,181{,}81 \tag{1–99}$$

   Vrednosti iz enačbe (1–99) uporabimo za sestavo matrike $\mathbf{Q}$ tako, da jih postavimo po diagonali matrike.

   Naslednja stvar, ki jo moramo določiti, pa so n, n_0 in r. Prvo se bomo osredotočili na n_0, torej na minimalno število opazovanj, za rešitev problema, to je določitev višin reperjev T in B. S slike 1–7 vidimo, da bi lahko višini H_T in H_B dobili, če bi uporabili a, α in z, torej 3 opazovanja.

Po drugi strani, pa bi lahko uporabili tudi a, α, b in β, kar pa pomeni 4 opazovanja. Vprašanje se pojavi, kaj je pravilno, 3 ali 4?

Izkaže se, da moramo na opazovanja gledati malo drugače. Ker določamo višine reperjev, vidimo, da z dejansko predstavlja višinsko razliko, medtem ko višinski razliki predstavljata samo para: a in α ter b in β. Povedano drugače, a brez α in b brez β ne poda možnosti določitve višinske razlike, zato je potrebno dolžino in višinski kot vedno obravnavati skupaj. Na ta način lahko vidimo, da imamo dejansko 3 opazovanja, ki predstavljajo višinsko razliko, to so: z, par (a,α) in par (b,β).

Če pa opazovanja obravnavamo na ta način, pa vidimo, da imamo $n = 3$, za n_0 pa bomo vedno dobili 2, torej $r = 1$. Ampak taka obravnava se nanaša le tu, da dobimo pravi število pogojih enačb (r). V nadaljevanju bo število opazovanj še vedno $n = 5$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
Število pogojnih enačb je torej $r = 1$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Za sestavo enačbe izhajamo iz slike (1–7), kjer vidimo, da mora veljati:

$$F \equiv \hat{a}\tan\hat{\alpha} + \hat{z} - \hat{b}\tan\hat{\beta} = 0 \tag{1–100}$$

V enačbi (1–100) količina $\hat{a}\tan\hat{\alpha}$ predstavlja višinsko razliko Δh_A^T, količina $\hat{b}\tan\hat{\beta}$ pa višinsko razliko Δh_B^T.

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 1×3. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial a} & \frac{\partial F}{\partial \alpha} & \frac{\partial F}{\partial b} & \frac{\partial F}{\partial \beta} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}000 & 30{,}000 & -0{,}577 & -40{,}000 & 1{,}000 \end{bmatrix} \tag{1–101}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 1×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–100) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(a\tan\alpha + z - b\tan\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0795\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–102}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 1×1. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 5\,257{,}5573 \end{bmatrix} \tag{1–103}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}902 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \tag{1–104}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 1×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1{,}512 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \tag{1–105}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_\alpha \\ v_b \\ v_\beta \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0179\,\mathrm{m} \\ -0{,}0004536 \\ 0{,}0103\,\mathrm{m} \\ 0{,}0006048 \\ -0{,}0179\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–106}$$

   V enačbi (1–106) sta popravka v_α in v_β podana v radianih. Zapišemo jih lahko tudi kot $v_\alpha = -1'33{,}6''$ in $v_\beta = 2'4{,}7''$.

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–98) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–106):

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 14{,}9821\,\mathrm{m} \\ 0{,}7849446 \\ 30{,}0103\,\mathrm{m} \\ 0{,}5242036 \\ 2{,}3821\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–107}$$

   Tudi v enačbi (1–107) sta izravnana kota $\hat{\alpha}$ in $\hat{\beta}$ podana v radianih. Zapišemo ju lahko tudi kot $\hat{\alpha} = 44°58'26{,}4''$ in $\hat{\beta} = 30°2'4{,}7''$.

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Za kontrolo v pogojne enačbe (1–100) vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe (1–107) in dobimo:

$$\hat{a}\tan\hat{\alpha} + \hat{z} - \hat{b}\tan\hat{\beta} = 5{,}60 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \tag{1–108}$$

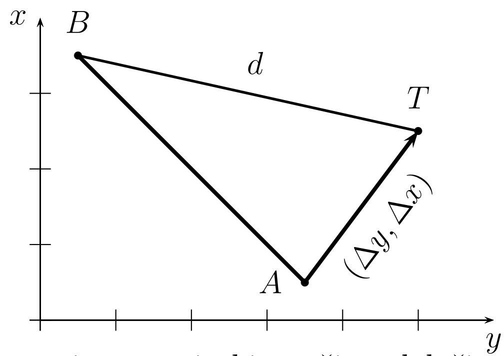
   Vidimo, da je odstopanje na desni strani enačbe majhno, nove iteracije ni potrebno izvesti.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Na koncu iz izravnanih opazovanj(enačba (1–107)) in dane višine reperja A ($H_A = 320{,}00\,\mathrm{m}$) izračunamo še višine reperjev T in B:

$$\begin{bmatrix} H_T \\ H_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 334{,}9685\,\mathrm{m} \\ 317{,}6179\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–109}$$

1.12 Primer 8 - Ravninska geodetska mreža (1)

V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A, x_A) = (123{,}00\,\mathrm{m}, 95{,}00\,\mathrm{m})$ in $B(y_B, x_B) = (95{,}00\,\mathrm{m}, 123{,}00\,\mathrm{m})$. Da bi določili položaj točke T smo s točke A opazovali bazni vektor $(\Delta y, \Delta x) = (12{,}15\,\mathrm{m}, 25{,}95\,\mathrm{m})$, s točke B pa smo opazovali dolžino $d = 40{,}00\,\mathrm{m}$, kot to prikazuje slika 1–8. Če so opazovanja enake natančnostjo in medseboj neodvisna, določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$ s pogojno izravnavo po MNK.



Slika 1–8: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja točke T

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.

   Vidimo, imamo opazovani komponenti baznega vektorja in eno dolžino, torej je $n = 3$. Ker moramo določiti koordinate točke T, je $n_0 = 2$ in zato $r = 1$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ je zato velikosti 3×1 in ima obliko:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta x \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}15\,\mathrm{m} \\ 25{,}95\,\mathrm{m} \\ 40{,}00\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–110}$$

   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, so kofaktorji opazovanj enaki:

$$q_{\Delta x} = 1{,}0 \quad q_{\Delta y} = 1{,}0 \quad q_d = 1{,}0 \tag{1–111}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.

   Število pogojnih enačb je torej $r = 1$, v katerih lahko nastopajo le izravnana opazovanja in konstante (koordinate točk A in B). Izhajamo iz funkcijske povezave med geodetskimi opazovanji in koordinatami točk, kjer za dolžino d velja:

$$d = \sqrt{(y_T - y_B)^2 + (x_T - x_B)^2} \tag{1–112}$$

   za komponenti baznega vektorja pa:

$$\Delta y = y_T - y_A \qquad \Delta x = x_T - x_A \tag{1–113}$$

   Iz enačbe (1–113) izrazimo koordinati y_T in x_T in ju vnesemo v enačbo (1–112) ter dobimo:

$$d = \sqrt{(y_A + \Delta y - y_B)^2 + (x_A + \Delta x - x_B)^2} \tag{1–114}$$

   Enačbo (1–114) uporabimo za sestavo pogojne enačbe. Pomislimo, da bomo morali odvajati po vseh opazovanjih, zato jo poenostavimo in izrazimo z izravnanimi opazovanji. Dobimo:

$$F \equiv \hat{d}^2 - (y_A + \Delta\hat{y} - y_B)^2 - (x_A + \Delta\hat{x} - x_B)^2 = 0 \tag{1–115}$$

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 1×3. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \Delta y} & \frac{\partial F}{\partial \Delta x} & \frac{\partial F}{\partial d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80{,}30 & 4{,}10 & 80{,}00 \end{bmatrix} \tag{1–116}$$

   Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 1×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–115) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \left[-(d^2 - (y_A + \Delta y - y_B)^2 - (x_A + \Delta x - x_B)^2) \right] = \begin{bmatrix} 16{,}225\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–117}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 1×1. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 12\,864{,}9 \end{bmatrix} \tag{1–118}$$

   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 7{,}773 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \tag{1–119}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 1×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1{,}261 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \tag{1–120}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{QA}^\mathrm{T}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_{\Delta y} \\ v_{\Delta x} \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1013\,\mathrm{m} \\ 0{,}0052\,\mathrm{m} \\ 0{,}1009\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–121}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–110) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–121):

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12{,}0487\,\mathrm{m} \\ 25{,}9552\,\mathrm{m} \\ 40{,}1009\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–122}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   Za kontrolo v pogojno enačbo (1–115) vstavimo vrednosti izravnanih opazovanj iz enačbe (1–122) in dobimo:

$$\hat{d}^2 - (y_A + \Delta\hat{y} - y_B)^2 - (x_A + \Delta\hat{x} - x_B)^2 = -1{,}03 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \tag{1–123}$$

   Vidimo, da je odstopanje na desni strani enačbe majhno, nove iteracije ni potrebno izvesti.

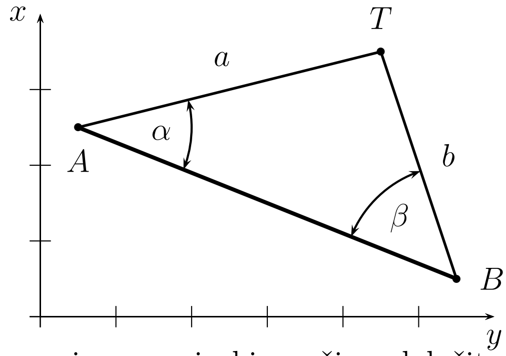
9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.

   Na koncu iz izravnanih opazovanj (enačba (1–122)) in danih koordinat točk A in B izračunamo še koordinate točke T (kakšen je najenostavnejši način?):

$$\begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135{,}0487\,\mathrm{m} \\ 120{,}9552\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–124}$$

1.13 Primer 9 - Ravninska geodetska mreža (2)

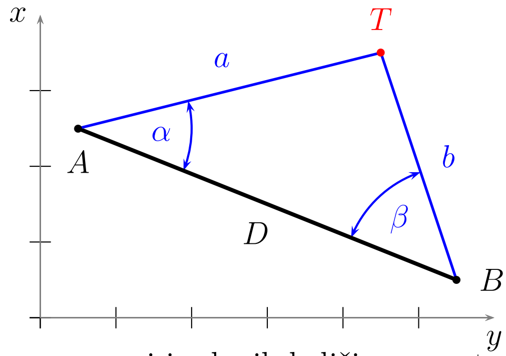
V ravnini imamo podana položaja dveh danih točk, $A(y_A; x_A) = (5{,}00\,\mathrm{m}; 10{,}00\,\mathrm{m})$ in $B(y_B; x_B) = (20{,}00\,\mathrm{m}; 0{,}00\,\mathrm{m})$. Da bi določili položaj točke T, smo s točke A opazovali dolžino $a = 16{,}2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = 0{,}1\,\mathrm{m}$) in kot $\alpha = 45°$ ($\sigma_\alpha = 30'$), s točke B pa dolžino $b = 13{,}2\,\mathrm{m}$ ($\sigma_b = 0{,}1\,\mathrm{m}$) in kot $\beta = 60°$ ($\sigma_\beta = 30'$), kot to prikazuje slika 1–9. S pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj koordinate točke $T(y_T; x_T)$.



Slika 1–9: Opazovanja v ravninski mreži za določitev položaja točke T

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz podatkov vidimo, da imamo opazovani dve dolžini in dva kota, torej je $n = 4$. Ker moramo določiti koordinate točke T, je $n_0 = 2$ in zato $r = 2$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ je zato velikosti 4×1 in ima obliko:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ b \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16{,}20\,\mathrm{m} \\ 0{,}7853982 \\ 13{,}20\,\mathrm{m} \\ 1{,}0471976 \end{bmatrix} \tag{1–125}$$
   Opazovanja so različne natančnosti in medseboj nekorelirana. Sestavimo kovariančno matriko $\mathbf{\Sigma}$, za referenčno varianco si izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_\alpha^2$ in dobimo kofaktorje opazovanj enake:
$$q_a = 131{,}31 \quad q_\alpha = 1{,}00 \quad q_b = 131{,}31 \quad q_\beta = 1{,}00 \tag{1–126}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r = 2$, v katerih lahko nastopajo le izravnana opazovanja in konstante (koordinate točk A in B). Da bi sestavili pogojni enačbi, izrišimo sliko opazovanj in danih količin, kot to prikazuje slika 1–10.



Slika 1–10: Prikaz opazovanj in danih količin za nastavitev pogojnih enačb

Na sliki 1–10 so z modro označena opazovanja (a, α, b, β), s črno dane količine (točki A in B določata dolžino D), z rdečo pa neznanke (koordinate točke T). Vidimo tudi, da so vsa opazovanja in dane količine podane v splošnem trikotniku $\triangle ABT$. Stranico $D = \overline{AB}$ izračunamo iz koordinat točk A in B in dobimo:

$$D = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = 18{,}0278\,\mathrm{m} \tag{1–127}$$

Pogojni enačbi sestavimo tako, da bodo v enačbah nastopala vsa opazovanja in stranica D. Uporabimo osnovne izreke trikotnika, primer dveh pogojnih enačb je:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}\sin\hat{\alpha} - \hat{b}\sin\hat{\beta} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) - D^2 = 0 \end{aligned} \tag{1–128}$$

Pri prvi pogojni enačbi iz enačbe (1–128) smo uporabili sinusov izrek, ki povezuje dve stranici in nasproti ležeča kota. Pri drugi pogojni enačbi pa smo uporabili kosinusni izrek, ki povezuje vse tri stranice in en kot, kjer smo si za kot izbrali kot na točki T, ki je enak $180° - \alpha - \beta$. Uporabili smo identiteto: $\cos(180° - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta)$.

> *Pri obravnavi geodetskih opazovanj v geodetski mreži pri pogojni izravnavi po MNK je ključnega pomena* ***poznavanje enačb splošnega trikotnika****. Pri terestričnih opazovanjih (dolžine, smeri / koti) geodetsko mrežo rešujemo tako, da izravnamo opazovanja v trikotnikih. V teh primerih so koordinate danih točk pomembne le za izračune dolžin in kotov med točkami. V primerih, ko opazujemo tudi bazne vektorje GNSS, pa uporabimo tudi znanje prehoda med* ***geodetskim kartezičnim koordinatnim sistemom*** *in* ***geodetskim polarnim koordinatnim sistemom****.*

3. Lineariziramo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 2×4. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Odvajamo pogojne enačbe po opazovajih in dobimo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}707 & 11{,}455 & -0{,}866 & -6{,}600 \\ 25{,}567 & -413{,}107 & 18{,}014 & -413{,}107 \end{bmatrix} \tag{1–129}$$

Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 2×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–128) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(a\sin\alpha - b\sin\beta) \\ -(a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha + \beta) - D^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}024\,\mathrm{m} \\ -0{,}988\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–130}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 2×2. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 338{,}920 & -1\,680{,}308 \\ -1\,680{,}308 & 469\,763{,}935 \end{bmatrix} \tag{1–131}$$

Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 3{,}004 \times 10^{-3} & 1{,}074 \times 10^{-5} \\ 1{,}074 \times 10^{-5} & 2{,}167 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \tag{1–132}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 2×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -8{,}149 \times 10^{-5} \\ -2{,}395 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \tag{1–133}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_\alpha \\ v_b \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0156\,\mathrm{m} \\ 0{,}0000560 \\ 0{,}0036\,\mathrm{m} \\ 0{,}0015273 \end{bmatrix} \tag{1–134}$$

V enačbi (1–134) sta popravka v_α in v_β podana v radianih. Zapišemo jih lahko tudi kot $v_\alpha = 0'11{,}5''$ in $v_\beta = 5'15{,}0''$.

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–125) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–134):

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 16{,}1844\,\mathrm{m} \\ 0{,}7854542 \\ 13{,}2036\,\mathrm{m} \\ 1{,}0487249 \end{bmatrix} \tag{1–135}$$

Tudi v enačbi (1–135) sta izravnana kota $\hat{\alpha}$ in $\hat{\beta}$ podana v radianih, ki ju lahko zapišemo kot $\hat{\alpha} = 45°0'11{,}5''$ in $\hat{\beta} = 60°5'15{,}0''$.

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
Pri tej nalogi ne bomo delali dodatne iteracije izravnave.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
Kadar izravnavamo geodetska opazovanja v geodetski mreži, so pri pogojni izravnavi rezultati izravnana opazovanja (enačba (1–135)). Nas pa zanimajo končne koordinate točk, v našem primeru koordinati y_T in x_T točke T. Izračunamo jih iz izravnanih opazovanj in danih koordinat točk A in B, enačbe za izračun pa nastavimo iz enačb prehoda med geodetskim polarnim in geodetskim kartezičnim koordinatnim sistemom.

Za izračun koordinat točke T bomo izhajali z dane točke A (poskusite tudi s točke B in primerjajte rezultate), izračun pa je dan z:

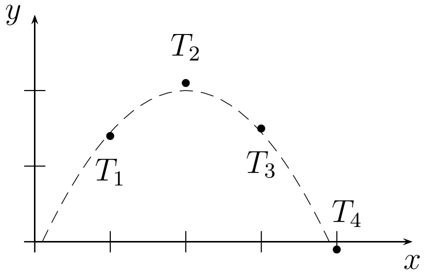
$$\begin{aligned} y_T &= y_A + \hat{a}\sin\nu_A^T = y_A + \hat{a}\sin(\nu_A^B - \hat{\alpha}) \\ x_T &= x_A + \hat{a}\cos\nu_A^T = x_A + \hat{a}\cos(\nu_A^B - \hat{\alpha}) \end{aligned} \tag{1–136}$$

V enačbi (1–136) smerni kot ν_A^B izračunamo iz koordinat in dobimo $\nu_A^B = 123°41'24{,}2''$. Koordinate točke T so:

$$\begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20{,}8699\,\mathrm{m} \\ 13{,}1749\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–137}$$

1.14 Primer 10 - Točke na paraboli

V ravnini smo izmerili koordinate y štirim točkam in dobili: $T_1(1; 1{,}4)$, $T_2(2; 2{,}1)$, $T_3(3; 1{,}5)$ in $T_4(4; -0{,}1)$, koordinate x točk obravnavamo kot konstante. S pogojno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite parametre parabole, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1–11: Točke v ravnini, ki ležijo na paraboli

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = 4$, $n_0 = 3$, $r = 1$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4 \\ 2{,}1 \\ 1{,}5 \\ -0{,}1 \end{bmatrix} \tag{1–138}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži $\mathbf{Q}$ enaka:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–139}$$

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.
   Število pogojnih enačb je torej $r = 1$, v katerih lahko nastopajo le izravnana opazovanja, $\hat{y}_i$, in konstante, x_i, $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Ugotoviti moramo, kakšnemu pogoju morajo opazovanja in konstante zadoščati, da bodo opisovali parabolo. Sestavimo prvo enačbe parabole, ki povezujejo izravnana opazovanja in konstante:

$$\begin{aligned} F_1 : \hat{y}_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ F_2 : \hat{y}_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \\ F_3 : \hat{y}_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c \\ F_4 : \hat{y}_4 &= ax_4^2 + bx_4 + c \end{aligned} \tag{1–140}$$

   V enačbi (1–140) vidimo, da imamo prvič 4 enačbe, v katerih pa nastopajo koeficienti parabole a, b in c, ki v pogojni enačbi ne smejo nastopati. Do rešitve bomo prišli tako, da bomo iz enačb (1–140) korak po koraku eliminirali posamezne koeficiente. Začnemo tako, da eliminiramo prosti člen c. Naredimo zaporedne razlike med enačbami:

$$\begin{aligned} F_2 - F_1 : \hat{y}_2 - \hat{y}_1 &= a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) \\ F_3 - F_2 : \hat{y}_3 - \hat{y}_2 &= a(x_3^2 - x_2^2) + b(x_3 - x_2) \\ F_4 - F_3 : \hat{y}_4 - \hat{y}_3 &= a(x_4^2 - x_3^2) + b(x_4 - x_3) \end{aligned} \tag{1–141}$$

V enačbah (1–141) vse tri dobljene enačbe delimo tako, da bomo imeli na desni člen b prost:

$$\begin{aligned} \frac{F_2-F_1}{x_2-x_1}:\frac{\hat{y}_2-\hat{y}_1}{x_2-x_1} &= a(x_2+x_1)+b \\ \frac{F_3-F_2}{x_3-x_2}:\frac{\hat{y}_3-\hat{y}_2}{x_3-x_2} &= a(x_3+x_2)+b \\ \frac{F_4-F_3}{x_4-x_3}:\frac{\hat{y}_4-\hat{y}_3}{x_4-x_3} &= a(x_4+x_3)+b \end{aligned} \tag{1–142}$$

Sedaj bomo eliminirali parameter b, in sicer spet z zaporednimi razlikami:

$$\begin{aligned} \frac{F_3-F_2}{x_3-x_2}-\frac{F_2-F_1}{x_2-x_1}:\frac{\hat{y}_3-\hat{y}_2}{x_3-x_2}-\frac{\hat{y}_2-\hat{y}_1}{x_2-x_1} &= a(x_3-x_1) \\ \frac{F_4-F_3}{x_4-x_3}-\frac{F_3-F_2}{x_3-x_2}:\frac{\hat{y}_4-\hat{y}_3}{x_4-x_3}-\frac{\hat{y}_3-\hat{y}_2}{x_3-x_2} &= a(x_4-x_2) \end{aligned} \tag{1–143}$$

Obe enačbi (1–143) delimo tako, da bomo osamili parameter a. Dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{F_3-F_2}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}-\frac{F_2-F_1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}:\frac{\hat{y}_3-\hat{y}_2}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}-\frac{\hat{y}_2-\hat{y}_1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} &= a \\ \frac{F_4-F_3}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)}-\frac{F_3-F_2}{(x_3-x_2)(x_4-x_2)}:\frac{\hat{y}_4-\hat{y}_3}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)}-\frac{\hat{y}_3-\hat{y}_2}{(x_3-x_2)(x_4-x_2)} &= a \end{aligned} \tag{1–144}$$

Končen korak je samo še, da enačbi (1–144) izenačimo in vse elemente damo na levo stran enačaja. Dobimo končno obliko pogojne enačbe:

$$F \equiv \frac{\hat{y}_4-\hat{y}_3}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)}-\frac{\hat{y}_3-\hat{y}_2}{(x_3-x_2)(x_4-x_2)}-\frac{\hat{y}_3-\hat{y}_2}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}+\frac{\hat{y}_2-\hat{y}_1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}=0 \tag{1–145}$$

3. Linearizamo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av}=\mathbf{f}$.
Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 1×4. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Parcialni odvodi pa so enaki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_1} &= -\frac{1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} &= \frac{1}{(x_3-x_2)(x_4-x_2)}+\frac{1}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}+\frac{1}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3} &= -\frac{1}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)}-\frac{1}{(x_3-x_2)(x_4-x_2)}-\frac{1}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3} &= \frac{1}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)} \end{aligned} \tag{1–146}$$

Matrika $\mathbf{A}$ ima glede na parcialne odvode iz enačbe (1–146) obliko:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} & \frac{\partial F}{\partial y_3} & \frac{\partial F}{\partial y_4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0{,}50 & 1{,}50 & -1{,}50 & 0{,}50 \end{bmatrix} \tag{1–147}$$

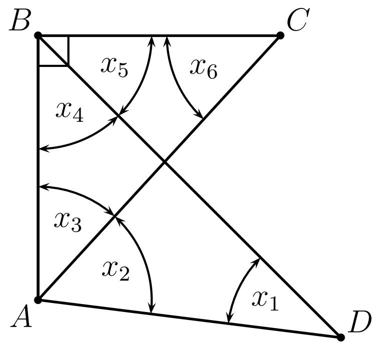
Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 1×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojni enačbi iz (1–145) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f}=\begin{bmatrix} -0{,}150 \end{bmatrix} \tag{1–148}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 1×1. Dobimo:
$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5{,}00 \end{bmatrix} \tag{1–149}$$
   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:
$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}20 \end{bmatrix} \tag{1–150}$$
5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 1×1, ki ima obliko:
$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0{,}03 \end{bmatrix} \tag{1–151}$$
6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:
$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0150 \\ -0{,}0450 \\ 0{,}0450 \\ -0{,}0150 \end{bmatrix} \tag{1–152}$$
7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–138) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–152):
$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1{,}4150 \\ 2{,}0550 \\ 1{,}5450 \\ -0{,}1150 \end{bmatrix} \tag{1–153}$$
8. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Na koncu želimo zapisali enačbo parabole, ki se optimalno prilega točkam. A kako dobiti parametre parabole? Izhajali bomo iz vmesnih enačb izpeljave pogojne enačbe, to so enačbe (1–140) - (1–144). Za izračun parametra a bomo izhajali iz prve enačbe v (1–144), kjer dobimo:
$$a = \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} - \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} = -0{,}5750 \tag{1–154}$$
   Ko imamo izračunan parameter a, lahko sedaj izračunamo parameter b. Izhajamo iz prve enačbe v (1–142) in dobimo:
$$b = \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} - a(x_2 + x_1) = 2{,}3650 \tag{1–155}$$
   Na koncu še iz prve enačbe iz (1–140) izračunamo parameter c:
$$c = \hat{y}_1 - ax_1^2 - bx_1 = -0{,}3750 \tag{1–156}$$
   Zapišimo samo še iskano enačbo parabole, ki se optimalno prilega točkam:
$$y = ax^2 + bx + c = -0{,}5750x^2 + 2{,}3650x - 0{,}3750 \tag{1–157}$$

1.15 Primer 11 - Sistem kotov v triangulacijski shemi

V triangulacijski shemi smo izmerili kote, kot to prikazuje slika 1–12, in dobili: $x_1 = 48{,}88°$, $x_2 = 42{,}10°$, $x_3 = 44{,}52°$, $x_4 = 43{,}80°$, $x_5 = 46{,}00°$ in $x_6 = 44{,}70°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s pogojno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in upoštevaj, da je na točki B pravi kot.



Slika 1–12: Koti v triangulacijski shemi med točkami A, B, C in D

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$. Nastavimo n, n_0 in r.

   Iz podatkov naloge je razvidno, da imamo $n = 6$ opazovanj, to so koti v triangulacijski shemi med štirimi točkami A, B, C in D, kot to prikazuje slika 1–12. Vektor opazovanj zato sestavimo kot:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48{,}88° \\ 42{,}10° \\ 44{,}52° \\ 43{,}80° \\ 46{,}00° \\ 44{,}70° \end{bmatrix} \tag{1–158}$$

   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, so vsi kofaktorji opazovanj enake in so:

$$q_i = 1 \qquad i = \{1, \ldots, 6\} \tag{1–159}$$

   Zanima pa nas tu tudi, koliko ne n_0. Če pogledamo sliko 1–12, vidimo da imamo dva trikotnika, in sicer:

   - trikotnik ΔABC, ki je pravokotni trikotnik, zato v njem potrebujemo le en kot (x_3 ali x_6) in
   - trikotnik ΔABD, ki je splošni trikotnik, zato v njem potrebujemo dva kota (dva izmed kotov x_1, $x_2 + x_3$ in x_4).

   Skupno torej velja, da je $n_0 = 3$ in zato $r = 3$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje poda možnost sestave ene enačbe.

   Število pogojnih enačb je torej $r = 3$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Pogoje, katerim morajo zadoščati opazovanja, določimo iz slike 1–12, dobimo pa jih tako, morajo biti koti v trikotniku enaki 180° in da je kot pri točki B enak 90°:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 + \hat{x}_4 - 180^\circ = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{x}_4 + \hat{x}_5 - 90^\circ = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{x}_3 + \hat{x}_4 + \hat{x}_5 + \hat{x}_6 - 180^\circ = 0 \end{aligned} \tag{1–160}$$

3. Linearizamo pogojne enačbe in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{Av} = \mathbf{f}$.
   Matrika koeficientov / parcialnih odvodov pogojnih enačb po opazovanjih $\mathbf{A}$ je velikosti 3×6. Število vrstic je enako številu enačb, medtem ko je število stolpcev enako številu opazovanj. Matrika $\mathbf{A}$ je enaka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_1}{\partial x_4} & \frac{\partial F_1}{\partial x_5} & \frac{\partial F_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & \frac{\partial F_2}{\partial x_4} & \frac{\partial F_2}{\partial x_5} & \frac{\partial F_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_4} & \frac{\partial F_3}{\partial x_5} & \frac{\partial F_3}{\partial x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–161}$$

   Vektor odstopanj pogojnih enačb $\mathbf{f}$ je velikosti 3×1, za vsako pogojno enačbo dobimo eno odstopanje. Vektor dobimo tako, da vse kar se nahaja na levi strani enačaja v pogojnih enačbah iz (1–160) prenesemo na desno stran. Pri tem se spremeni predznak, namesto izravnanih opazovanj pa uporabimo merjene vrednosti. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 180^\circ - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ 90^\circ - x_4 - x_5 \\ 180^\circ - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}70^\circ \\ 0{,}20^\circ \\ 0{,}98^\circ \end{bmatrix} \tag{1–162}$$

4. Izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_e$ in matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj.
   Ko smo nastavili osnovni matrični model (matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\mathbf{f}$) in stohastični model pogojne izravnave (matriko $\mathbf{Q}$), nas čaka samo še niz matričnih računov do rezultatov izravnave. Prvo izračunamo matriko kofaktorjev ekvivalentnih enačb/opazovanj $\mathbf{Q}_e$, ki je velikosti 3×3. Dobimo:

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{AQA}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{1–163}$$

   Matriko uteži $\mathbf{P}_e$ ekvivalentnih enačb/opazovanj dobimo z inverzom matrike $\mathbf{Q}_e$ in dobimo:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{Q}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}3333 & 0{,}0000 & -0{,}1667 \\ 0{,}0000 & 1{,}0000 & -0{,}5000 \\ -0{,}1667 & -0{,}5000 & 0{,}5833 \end{bmatrix} \tag{1–164}$$

5. Izračunamo Lagrangejeve multiplikatorje, vektor korelat $\mathbf{k}$.
   Sledi izračun vektorja korelat $\mathbf{k}$, velikosti 3×1, ki ima obliko:

$$\mathbf{k} = \mathbf{P}_e\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0{,}07000 \\ -0{,}29000 \\ 0{,}35500 \end{bmatrix} \tag{1–165}$$

6. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja $\mathbf{k}$ izračunamo popravke opazovanj, vektor $\mathbf{v}$, ki je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{x_2} \\ v_{x_3} \\ v_{x_4} \\ v_{x_5} \\ v_{x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}070° \\ 0{,}070° \\ 0{,}425° \\ 0{,}135° \\ 0{,}065° \\ 0{,}355° \end{bmatrix} \tag{1–166}$$

7. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor izravnanih opazovanj dobimo iz vektorja merjenih opazovanj $\mathbf{l}$ iz enačbe (1–158) in vektorja popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ iz enačbe (1–166):

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \\ \hat{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48{,}950° \\ 42{,}170° \\ 44{,}945° \\ 43{,}935° \\ 46{,}065° \\ 45{,}055° \end{bmatrix} \tag{1–167}$$

8. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo pogojne izravnave.
   V triangulacijski shemi so pogojne enačbe linearne, zato dodatne iteracije ni potrebno izvesti.

9. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune, uporabimo izravnana opazovanja in rešimo problem.
   Naloga ne zahteva nobenega dodatnega izračuna.