1 POSREDNA IZRAVNAVA PO MNK

Posredna izravnava po MNK predstavlja **posplošitev** in **poenostavitev** posredne metode MNK. Posplošitev bomo videli v tem, da bomo z enakim trudom reševali tako linearne kot tudi nelinearne (težje) probleme. Poenostavitev bomo videli v tem, da vse probleme rešimo po enakem postopku - matrično.
Pri posredni izravnavi po MNK bomo vse količine vodili v vektorski obliki. Imeli bomo vektor opazovanj $\mathbf{l}$, vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$, vsi vektorji pa so velikosti $n \times 1$ (število opazovanj smo označili z n). Vektorju opazovanj pripada variančno-kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$, s pomočjo katere na osnovi izbrane referenčne variance a-priori σ_0^2 izračunamo matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in naknadno še matriko uteži $\mathbf{P}$. Vse matrike stohastičnega modela so velikosti $n \times n$.

1.1 Neznanke, uvedene v model

Pri posredni metodi MNK smo videli, da moramo v funkcionalni model uvesti $u = n_0$ neznank, ki jih v enačbah popravkov povežemo z (izravnanimi) opazovanji. Neznanke bomo označili z x_i $(i = 1, 2, \ldots, u)$ in jih dali v vektor neznank $\mathbf{x}$, velikosti $u \times 1$. Kot bomo videli v poglavju o sestavi enačb popravkov (poglavje 1.2), bomo v postopku posredne izravnave vse enačbe popravkov linearizirali. Posledica tega je, da bomo morali vedno izračunati ali nastaviti približne vrednosti neznank. Le-te bomo označili z $x_{i,0}$ $(i = 1, 2, \ldots, u)$ in jih dali v vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$, velikosti $u \times 1$. V splošnem se približne vrednosti neznank izračuna iz opazovanj.
Razliko med vektorjema $\mathbf{x}$ in $\mathbf{x}_0$ bomo označili z vektorjem $\mathbf{\Delta}$, ki bo vseboval popravke približnih vrednosti neznank δx_i $(i = 1, 2, \ldots, u)$. Pri posredni izravnavi bomo imeli tri vektorje, ki se nanašajo na neznanke:

- Vektor (končnih) neznank: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_u \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, ki ga ne poznamo in ga v postopku posredne izravnave izračunamo.
- Vektor približnih vrednosti neznank: $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} & x_{3,0} & \ldots & x_{u,0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, ki ga izračunamo pred posredno izravnavo, ko v model uvedemo neznanke.
- Vektor popravkov približnih vrednosti neznank: $\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta x_1 & \delta x_2 & \delta x_3 & \ldots & \delta x_u \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, ki predstavlja prvo rešitev v postopku posredne izravnave.

Povezava med vsemi tremi vektorji, ki se nanašajo na neznanke, je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} \qquad \leftrightarrow \qquad x_i = x_{i,0} + \delta x_i \tag{1}$$

Pri posredni izravnavi na začetku izračunamo približne vrednosti neznank ($\mathbf{x}_0$), v postopku posredne izravnave izračunamo popravke približnih vrednosti neznank ($\mathbf{\Delta}$), končne neznanke pa dobimo tako, da oba vektorja seštejemo z enačbo 1.
Pri izračunu približnih vrednosti neznank se pojavi vprašanje, kako točno moramo le-te izračunati. Izkaže se, da velja:

- če imamo NELINEARNE enačbe popravkov, moramo približne vrednosti izračunati "čim bolj" točno, kar pomeni, da naj bodo čim bližje pravim, končnim vrednostim neznank. Če za izračun uporabimo kar opazovanja, so približne vrednosti izračunane dovolj točno.
- če imamo LINEARNE enačbe popravkov, pa približne vrednosti neznank ne vplivajo na rezultate. V tem primeru je povsem nepomembno, kakšne so njihove vrednosti, lahko so tudi vse enake 0 (nič).

1.2 Enačbe popravkov

Pri posredni izravnavi moramo sestaviti n enačb popravkov, s katerimi povežemo (izravnana) opazovanja z neznankami. Enačbe popravkov so v splošnem nelinearne, sestavimo pa jih tako, da se vsi elementi enačb nahajajo le na levi strani enačaja in na desni strani ostane samo še vrednost 0. Ta pogoj sicer ni nujen, ampak nam olajša izračun pravih predznakov vseh parcialnih odvodov v nadaljevanju. Enačbe popravkov imajo obliko:

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{l}_1 - g_1(x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{l}_2 - g_2(x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \\
F_3 &\equiv \hat{l}_3 - g_3(x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \\
&\vdots \qquad \vdots \\
F_n &\equiv \hat{l}_n - g_n(x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Pravila za sestavo enačb popravkov so povsem enaka kot pri posredni metodi MNK (glej datoteko *MNK_SistemEnacb.pdf*), vsaka enačba popravkov vsebuje le eno opazovanje (na prvem mestu), v vseh enačbah pa moramo uporabiti vse neznanke. V enačbah 2 $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_u)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ predstavljajo (v splošnem nelinearne) funkcije, s katerimi matematično povežemo neznanke in izravnana opazovanja. Za rešitev posredne izravnave po MNK, moramo nelinearne enačbe pretvoriti v sistem linearnih enačb, uporabimo pa postopek linearizacije.

1.3 Linearizacija enačb popravkov:

Enačbe popravkov iz 2 so v splošnem nelinearne, zato je izračun neznank $\mathbf{x}$ problematičen. Postopki reševanja sistemov nelinearnih enačb so komplicirani, temeljijo na iteracijskih postopkih, v katerih je pomembna približna vrednost neznank, na koncu pa lahko dobimo rešitev, ki ne bo temeljila na pogoju metode najmanjših kvadratov. Zato enačbe popravkov lineariziramo.

Za prehod iz nelinearne v linearno obliko uporabimo linearizacijo na osnovi Taylorjeve vrste. Postopek linearizacije izvedemo za neznanke okoli njihovih približnih vrednosti $x_{i,0}$, s prirastkom neznank za vrednosti popravkov približnih vrednosti neznank δx_i. Pri razvoju enačb popravkov v Taylorjevo vrsto pa zanemarimo vse člene, kjer nastopajo popravki približnih vrednosti neznank s potenco 2 ali več. Poljubna (i-ta) enačba popravkov se linearizira na sledeč način:

$$F_i \equiv v_i + l_i + g_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0}) + \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial x_u}\delta x_u = 0 \tag{3}$$

Enačbo 3 bomo preuredili tako, da bodo na levi strani tiste količine, ki jih ne poznamo (so rezultat posredne izravnave), to so popravki opazovanj (v_i) in popravki približnih vrednosti neznank ($\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_u$), na desno stran pa bomo dali vse tiste količine, ki jih lahko izračunamo. To so opazovanja (l_i) in izračun funkcij (g_i) na osnovi približnih vrednosti neznank ($x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0}$). Preurejena enačba ima obliko:

$$F_i \equiv v_i + \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial x_u}\delta x_u = g_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0}) - l_i \tag{4}$$

Vidimo, da je enačba 4 v linearni obliki, saj so vse neznane količine (v_i in $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_u$) pomnožene le s konstantami (parcialni odvodi $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, u)$ so izračunani iz približnih vrednosti neznank in so konstante). Ker je enačba linearna, jo lahko zapišemo v matrični obliki. Isto naredimo za vse enačbe popravkov iz enačbe 2, matrični zapis pa ima obliko:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_u} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \frac{\partial F_i}{\partial x_2} & \ddots & \frac{\partial F_i}{\partial x_u} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

Enačbo 5 lahko z ustreznimi oznakami matrik zapišemo kot:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f} \tag{6}$$

V enačbi 6 sta dodatno definirana dva elementa, in sicer:

B matrika koeficientov (parcialnih odvodov) enačb popravkov, izračunana iz približnih vrednostmi neznank, velikosti $n \times u$, oz $n \times n_0$ in

f vektor odstopanj (prostih členov) enačb popravkov, velikosti $n \times 1$.

Glede na obliko vektorja **f** v enačbi 3 vidimo, da je vsak člen f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sestavljen iz dveh delov, in sicer $f_i = g_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0}) - l_i$. Če označimo $d_i = g_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0})$, potem lahko vektor **f** zapišemo kot razliko dveh vektorjev: $\mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l}$.

1.4 Rešitev posredne izravnave po MNK

Izhajamo iz osnovnega matričnega sistema posredne izravnave po MNK, ki je predstavljen v enačbi 6, tej enačbi rečemo tudi funkcionalni model posredne izravnave, saj enačba povezuje opazovanja z neznankami (preko funkcij). Ker imamo sistem n enačb, v katerih nastopa n popravkov opazovanj in u popravkov približnih vrednosti neznank, sistem ni enolično rešljiv. Pogoj, ki mu morajo popravki opazovanj zadostiti, je pogoj metode najmanjših kvadratov, ki je predstavljena s karakteristično funkcijo Φ:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} \Rightarrow \min. \tag{7}$$

Kjer pa velja:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} \tag{8}$$

Če v enačbo 7 vnesemo enačbo 8 dobimo:

$$\Phi = (\mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}) \Rightarrow \min. \tag{9}$$

Najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ iz enačbe 9 bomo dobili, ko izračunamo odvod funkcije Φ po vektorju neznank $\boldsymbol{\Delta}$, odvod pa izenačimo z 0. Dobljen sistem se imenuje sistem normalnih enačb. Sestavljata ga matrika sistema normalnih enačb $\mathbf{N}_{u\times u}$ in vektor sistema normanih enačb $\mathbf{t}_{u\times 1}$, kjer velja:

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{t} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} \end{aligned} \tag{10}$$

Sistem normalnih enačb je enolično rešljiv, saj prestavlja sistem u enačb, v katerih nastopa u neznank. Rešitev posredne izravnave, oziroma rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave so trije vektorji, in sicer:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{11}$$

1.5 Postopek izvedbe posredne izravnave po MNK

Postopek reševanja nalog s posredno izravnavo poteka zelo podobno kot postopek pri posredni metodi MNK, le da bomo tu izračune delali v matrični obliki. V nadaljevanju so predstavljeni koraki posredne izravnave.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

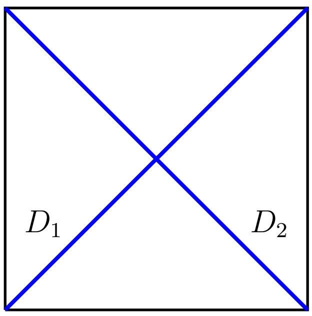
2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo. Pravila za sestavo enačb popravkov so podana v dokumentu *MNK_SistemEnacb.pdf*. Dodatno pravilo, ki je pri posredni izravnavi zelo pomembno pa je, da so enačbe popravkov sestavljene tako, da se celotna enačba nahaja le na levi strani enačaja. Desna stran naj ima samo še vrednost 0. Pomembno je tudi, da se vsaka enačba popravkov začne z $\hat{l}_i$ – izravnano opazovanje ima vedno predznak + in nobenega koeficienta.

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Za izračun v splošnem uporabimo kar opazovanja, s tem dobimo dobre približne vrednosti neznank. Če pa so enačbe popravkov linearne, izbira približnih vrednosti neznank ne vpliva na rezultate, zato so lahko vse enake 0 (oziroma karkoli).
5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Izračunamo vse parcialne odvode in tako nastavimo matriko $\mathbf{B}$. Izračunamo vsa odstopanja enačb popravkov in nastavimo vektor $\mathbf{f}$.
6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave. Drugo iteracijo naredimo tako, da za približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ uporabimo izravnane neznanke $\mathbf{x}$ in postopek ponovimo, od alineje 5 naprej.
11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.

1.6 Primer rešitve s posredno izravnavo – diagonala kvadrata merjena 2-krat

V kvadratu smo izmerili diagonalo dvakrat, kot prikazuje slika 1, in dobili $D_1 = 5.2\,\mathrm{m}$ ter $D_2 = 5.1\,\mathrm{m}$.



Slika 1: Skica kvadrata in opazovanih diagonal v kvadratu

S posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj velikost kvadrata, če:

1. sta opazovanji enakih natančnosti in medseboj nekorelirani,
2. sta opazovanji različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0.1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0.2\,\mathrm{m}$, medseboj nekorelirani in za neznanko nastavimo stranico a in

3. sta opazovanji različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0.1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0.2\,\mathrm{m}$, medseboj nekorelirani, a za neznanko nastavimo površino S.

1.6.1 Opazovanji enakih natančnosti, medseboj nekorelirani, neznanka je diagonala D

V tem primeru imamo diagonali enakih natančnosti, ki sta medseboj nekorelirani. Za neznanko bomo nastavili diagonalo D. Postopek posredne izravnave sledi korakom iz poglavja 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = 2$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2\,\mathrm{m} \\ 5.1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{12}$$
   Opazovanji sta enake natančnosti in medseboj nekorelirani, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ kar enotska matrika $\mathbf{I}$ velikosti 2×2:
   $$\mathbf{P} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Ker je minimalno število opazovanj, potrebnih za rešitev problema, enako $n_0 = 1$, uvedemo eno neznanko, v tem primeru diagonalo D. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 1×1 in ima obliko:
   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \tag{14}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 2$ enačb popravkov. Vsako opazovanje iz 12 predstavimo kot funkcijo uvedenih neznank iz enačbe 14. Enačbe nastavimo tako, da je celotna enačba na levi strani enačaja. Dobimo:
   $$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 - D = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 - D = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
   Nastaviti moramo približno vrednost neznanke D_0. Ker sta enačbi popravkov iz 15 linearni, izbira numerične vrednosti za D_0 ne vpliva na rezultate, zato je najbolj enostavno približno vrednost nastaviti kot:
   $$D_0 = 0.0\,\mathrm{m} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{16}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
   Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj

enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov odvajati po vseh neznankah. V našem primeru torej obe enačbi popravkov iz 15 odvajamo po eni neznanki iz 14. Matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $n \times u$, torej 2×1 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial D} \\ \frac{\partial F_1}{\partial D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Za izračun vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov v 15. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(D_1 - D_0) \\ -(D_2 - D_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.20\,\mathrm{m} \\ -5.10\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{18}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti $u \times u$, v našem primeru torej 1×1:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.00 \end{bmatrix} \tag{19}$$

   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti $u \times 1$, v našem primeru torej 1×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_1 D_1 + p_2 D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5.2\,\mathrm{m} + 1 \cdot 5.1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.30\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{20}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Rešimo sistem normalnih enačb in rešitev vektorja $\boldsymbol{\Delta}$ je:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta D \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{p_1 D_1 + p_2 D_2}{p_1 + p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 \cdot 5.2\,\mathrm{m} + 1 \cdot 5.1\,\mathrm{m}}{1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{21}$$

   Vidimo, da smo dobili kar aritmetično sredino. Rezultat enak kot pri posredni in direktni metodi MNK, seveda, v vseh treh primerih gre za enak postopek. Vektor neznank $\mathbf{x}$ dobimo z:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} D_0 + \delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0\,\mathrm{m} + 5.15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{22}$$

   Ker je bila približna vrednost neznanke $D_0 = 0$, smo v vektorju $\boldsymbol{\Delta}$ dobili kar končno vrednost neznanke $D = \delta D$.

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 21, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 17 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 18 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.20\,\mathrm{m} - (-1.0 \cdot 5.15\,\mathrm{m}) \\ -5.10\,\mathrm{m} - (-1.0 \cdot 5.15\,\mathrm{m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05\,\mathrm{m} \\ 0.05\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{23}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 23) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 12) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{D}_1 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.15\,\mathrm{m} \\ 5.15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{24}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Ker so enačbe popravkov linearne, smo dobili že končne rezultate. Ponovno iteracijo bi delali takrat, ko bi imeli nelinearne enačbe popravkov in slabe približne vrednosti neznank:

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga ne zahteva kakšnega dodatnega izračuna.

1.6.2 Opazovanji različnih natančnosti, medseboj nekorelirani, neznanka je diagonala a

V tem primeru imamo diagonali različnih natančnosti, a medseboj nekorelirana. Za neznanko bomo nastavili stranico a. Postopek posredne izravnave sledi korakom iz poglavja 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = 2$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2\,\mathrm{m} \\ 5.1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{25}$$

Opazovanji sta različnih natančnosti ($\sigma_1 = 0.1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0.2\,\mathrm{m}$) in medseboj nekorelirani, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
Ker je minimalno število opazovanj, potrebnih za rešitev problema, enako $n_0 = 1$, uvedemo eno neznanko, v tem primeru stranico a. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 1×1 in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \tag{27}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
Sestavimo $n = 2$ enačb popravkov. Vsako opazovanje iz 25 predstavimo kot funkcijo uvedenih neznank iz enačbe 27. Enačbe nastavimo tako, da je celotna enačba na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 - \sqrt{2}\,a = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 - \sqrt{2}\,a = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
Nastaviti moramo približno vrednost neznanke a_0. Ker sta enačbi popravkov iz 28 linearni, izbira numerične vrednosti za a_0 ne vpliva na rezultate, zato je najbolj enostavno približno vrednost nastaviti kot:

$$a_0 = 0.0\,\mathrm{m} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{29}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov odvajati po vseh neznankah. V našem primeru torej obe enačbi popravkov iz 28 odvajamo po eni neznanki iz 27. Matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $n \times u$, torej 2×1 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} \\ \frac{\partial F_1}{\partial a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4142 \\ -1.4142 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(D_1 - \sqrt{2}\,a_0) \\ -(D_2 - \sqrt{2}\,a_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.20\,\mathrm{m} \\ -5.10\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{31}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti $u \times u$, v našem primeru torej 1×1:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2p_1 + 2p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4.0 + 2 \cdot 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.00 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti $u \times 1$, v našem primeru torej 1×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}p_1 D_1 + \sqrt{2}p_2 D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0\sqrt{2}\,5.2\,\mathrm{m} + 1.0\sqrt{2}\,5.1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.628\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{33}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
Rešimo sistem normalnih enačb in rešitev vektorja $\boldsymbol{\Delta}$ je:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta a \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{p_1 D_1 + p_2 D_2}{p_1 + p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4.0 \cdot 5.2\,\mathrm{m} + 1.0 \cdot 5.1\,\mathrm{m}}{4.0 + 1.0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.663\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Vidimo, da smo za rezultat dobili uteženo sredino opazovanj (diagonal), ki jo s faktorjem $1/\sqrt{2}$ pretvorimo v neznano stranico. Rezultat enak kot pri posredni in direktni metodi MNK, seveda, v vseh treh primerih gre za enak postopek. Vektor neznank $\mathbf{x}$ dobimo z:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} a_0 + \delta a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0\,\mathrm{m} + 3.663\,\mathrm{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.663\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{35}$$

Ker je bila približna vrednost neznanke $a_0 = 0$, smo v vektorju $\boldsymbol{\Delta}$ dobili kar končno vrednost neznanke $a = \delta a$.

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 34, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 30 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 31 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.20\,\mathrm{m} - (-1.4142 \cdot 3.663\,\mathrm{m}) \\ -5.10\,\mathrm{m} - (-1.4142 \cdot 3.663\,\mathrm{m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.02\,\mathrm{m} \\ 0.08\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{36}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 36) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 25) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{D}_1 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.18\,\mathrm{m} \\ 5.18\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{37}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Izračunajmo tu površino kvadrata iz izravnane neznanke a:

$$S = a^2 = 13.416\,200\,\mathrm{m}^2 \tag{38}$$

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga ne zahteva kakšnega dodatnega izračuna.

1.6.3 Opazovanji različnih natančnosti, medseboj nekorelirani, neznanka je površina S

V tem primeru imamo diagonali različnih natančnosti, a medseboj nekorelirana. Za neznanko bomo nastavili površino kvadrata S, s čimer bomo pokazali, da izbira neznanke ne vpliva na končne rezultate. Postopek posredne izravnave sledi korakom iz poglavja 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = 2$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2\,\mathrm{m} \\ 5.1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{39}$$

Opazovanji sta različnih natančnosti ($\sigma_1 = 0.1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0.2\,\mathrm{m}$) in medseboj nekorelirani, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Ker je minimalno število opazovanj, potrebnih za rešitev problema, enako $n_0 = 1$, uvedemo eno neznanko, v tem primeru površino S. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 1×1 in ima obliko:
   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \tag{41}$$
3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 2$ enačb popravkov. Vsako opazovanje iz 39 predstavimo kot funkcijo uvedenih neznank iz enačbe 41. Enačbe nastavimo tako, da je celotna enačba na levi strani enačaja. Dobimo:
   $$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 - \sqrt{2\,S} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 - \sqrt{2\,S} = 0 \end{aligned} \tag{42}$$
4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
   Nastaviti moramo približno vrednost neznanke S_0. Sedaj pa vidimo, da enačbi popravkov iz 42 nista linearni (neznanka je pod korenom), zato je potrebno približne vrednosti izračunati iz opazovanj. Uporabimo:
   $$S_0 = \frac{D_1^2}{2} = 13.52\,\mathrm{m}^2 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.52\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{43}$$
5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
   Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov odvajati po vseh neznankah. V našem primeru torej obe enačbi popravkov iz 42 odvajamo po eni neznanki iz 41. Matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $n \times u$, torej 2×1 in ima obliko:
   $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial S} \\ \frac{\partial F_1}{\partial S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2\,S_0}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2\,S_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1923 \\ -0.1923 \end{bmatrix} \tag{44}$$
   Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:
   $$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(D_1 - \sqrt{2\,S_0}) \\ -(D_2 - \sqrt{2\,S_0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00\,\mathrm{m} \\ 0.10\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{45}$$
6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti $u \times u$, v našem primeru torej 1×1:
   $$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.18 \end{bmatrix} \tag{46}$$
   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti $u \times 1$, v našem primeru torej 1×1:
   $$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0.0192\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{47}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
Rešimo sistem normalnih enačb in rešitev vektorja $\mathbf{\Delta}$ je:
$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix}\delta S\end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix}-0.104\,\mathrm{m}^2\end{bmatrix} \tag{48}$$
Za rezultat dobimo majhno vrednost, saj predstavlja samo popravek približne vrednosti povšine S_0 iz enačbe 43. Vektor neznank $\mathbf{x}$ in končno vrednost neznanke (S) dobimo z:
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix}S_0 + \delta S\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13.52\,\mathrm{m} - 0.104\mathrm{m}^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13.416\,\mathrm{m}^2\end{bmatrix} \tag{49}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe 48, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 44 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 45 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:
$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.00\,\mathrm{m} - (-0.1923 \cdot (-0.104\,\mathrm{m}))\\ 0.10\,\mathrm{m} - (-0.1923 \cdot (-0.104\,\mathrm{m}))\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.02\,\mathrm{m}\\ 0.08\,\mathrm{m}\end{bmatrix} \tag{50}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 50) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 39) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:
$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix}\hat{D}_1\\ \hat{D}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5.18\,\mathrm{m}\\ 5.18\,\mathrm{m}\end{bmatrix} \tag{51}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Enačbe popravkov so bile nelinearne, zato se pojavi vprašanje, ali je potrebno izvesti še eno iteracijo. V primeru poglavja 1.6.2, ko smo za neznanko vzeli stranico a, smo izračunano površino dobili (glej enačbo 38) $S_a = 13.416\,200\,\mathrm{m}^2$. V tem primeru, ko pa smo za neznanko vzeli kar površino S, pa smo dobili (enačba 49) $S_S = 13.416\,000\,\mathrm{m}^2$. Razlika je torej $\Delta S = 13.416\,200\,\mathrm{m}^2 - 13.416\,000\,\mathrm{m}^2 = 0.000\,200\,\mathrm{m}^2$.

    Razlika nastane zato, ker smo pri linearizaciji enačb popravkov zanemarili vse člene višjih redov. Rešitev je v tem, da končno izravnano vrednost površine $S_S = 13.416\,000\,\mathrm{m}^2$ iz enačbe 49 vzamemo za približno vrednost neznanke v enačbi 43 in ponovimo postopek.

    Ta primer kaže na dva zelo pomembna zaključka. Prvič, izbira neznanke ne vpliva na rezultate. Drugič, splača se izbrati take neznanke, da bo izračun čim bolj enostaven.

    Na koncu tudi še en pomemben vidik, in sicer, ali izvedemo še eno iteracijo je odvisno od tega, kakšno napako smo naredili. Če nam razlika v površini $\Delta S = 0.000\,200\,\mathrm{m}^2$ predstavlja zanemarljivo malo, druge iteracije seveda ne delamo.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga ne zahteva kakšnega dodatnega izračuna.