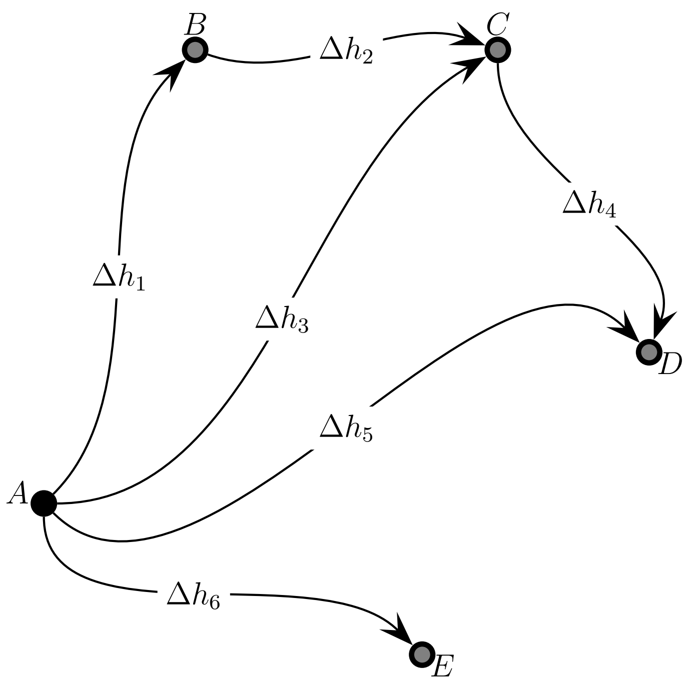
Posredna izravnava po MNK – Višinska geodetska mreža:

V nivelmanski mreži, kjer je višina točke A dana ($H_A = 320.00\,\mathrm{m}$), smo opazovali višinske razlike in dolžine nivelmanskih linij, kakor jih prikazuje slika 1. Numerične vrednosti opazovanj so podane v preglednici 1.

Preglednica 1: Izmerjene vrednosti višinskih razlik med reperji

VIŠINSKA RAZLIKA	**DOLŽINA LINIJE**
$\Delta h_1 = 0.25\,\mathrm{m}$	$\overline{AB} = 10\,\mathrm{m}$
$\Delta h_2 = 0.30\,\mathrm{m}$	$\overline{BC} = 20\,\mathrm{m}$
$\Delta h_3 = 0.60\,\mathrm{m}$	$\overline{AC} = 40\,\mathrm{m}$
$\Delta h_4 = -0.15\,\mathrm{m}$	$\overline{CD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_5 = 0.40\,\mathrm{m}$	$\overline{AD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_6 = -0.15\,\mathrm{m}$	$\overline{AE} = 10\,\mathrm{m}$

S posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite izravnane vrednosti višin reperjev B, C, D in E.



Slika 1: Opazovane višinske razlike v višinski geodetski mreži

Rešitev s posredno izravnavo po MNK

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Imamo $n =$ ___, $n_0 =$ ___, $r =$ ___ in:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$
   Uteži nastavimo tako, da bodo cela števila in najmanjša možna:
$$p_1 = \_\_ \quad p_2 = \_\_ \quad p_3 = \_\_ \quad p_4 = \_\_ \quad p_5 = \_\_ \quad p_6 = \_\_ \tag{2}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 =$ ___. Izbrali bomo kar višine novih točk, saj po tem sprašuje naloga, torej H_B, H_C, H_D in H_E. Vektor neznank ima tako obliko:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 6$ enačb popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Enačbe nastavimo tako, da je celotna enačba na levi strani enačaja. Dobimo:
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \Delta\hat{h}_1 - H_B + H_A = 0 \\ F_2 &\equiv \Delta\hat{h}_2 - H_C + H_B = 0 \\ F_3 &\equiv \Delta\hat{h}_3 - H_C + H_A = 0 \\ F_4 &\equiv \Delta\hat{h}_4 - H_D + H_C = 0 \\ F_5 &\equiv \Delta\hat{h}_5 - H_D + H_A = 0 \\ F_6 &\equiv \Delta\hat{h}_6 - H_E + H_A = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

4. Nastavimo približne vrednosti neznank, izračunamo vektor $\mathbf{x}_0$.
   Ker so enačbe popravkov iz 4 linearne, približne vrednosti neznank ne vplivajo na končne rezultate. Zaradi tega lahko vse približne vrednosti vseh neznank nastavimo na nič (poskusite doma rešiti neznanke na ta način). V našem primeru bomo približne vrednosti neznank $H_{B,0}$, $H_{C,0}$, $H_{D,0}$ in $H_{E,0}$ izračunali iz opazovanj, in sicer:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_{B,0} \\ H_{C,0} \\ H_{D,0} \\ H_{E,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_A + \Delta h_1 \\ H_A + \Delta h_3 \\ H_A + \Delta h_5 \\ H_A + \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{5}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
Nastavimo oba vektorja, ki bosta rezultat izravnave, to sta vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ in vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$, in sicer:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta H_B \\ \delta H_C \\ \delta H_D \\ \delta H_E \end{bmatrix} \tag{6}$$

Vektor $\boldsymbol{\Delta}$ bo, ker smo približne vrednosti nastavili iz opazovanj, dejansko vseboval le popravke približnih vrednosti neznank. Nastavimo tudi matriko $\mathbf{B}$, ki vsebuje parcialne odvode vseh enačb popravkov po vseh neznankah:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial H_B} & \frac{\partial F_1}{\partial H_C} & \frac{\partial F_1}{\partial H_D} & \frac{\partial F_1}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_2}{\partial H_B} & \frac{\partial F_2}{\partial H_C} & \frac{\partial F_2}{\partial H_D} & \frac{\partial F_2}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_3}{\partial H_B} & \frac{\partial F_3}{\partial H_C} & \frac{\partial F_3}{\partial H_D} & \frac{\partial F_3}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_4}{\partial H_B} & \frac{\partial F_4}{\partial H_C} & \frac{\partial F_4}{\partial H_D} & \frac{\partial F_4}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_5}{\partial H_B} & \frac{\partial F_5}{\partial H_C} & \frac{\partial F_5}{\partial H_D} & \frac{\partial F_5}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_6}{\partial H_B} & \frac{\partial F_6}{\partial H_C} & \frac{\partial F_6}{\partial H_D} & \frac{\partial F_6}{\partial H_E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

Sestavimo tudi vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ in sicer: vse, kar se najaha na levi strani enačb popravkov v 4 prenesemo na desno stran. Ker še ne poznamo izravnanih vrednosti opazovanj uporabimo merjene vrednosti opazovanj in ker še ne poznamo vrednosti neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Ker smo leve strani prenesli na desno stran, se spremeni tudi predznak. Dobimo

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} H_{B,0} - H_A - \Delta h_1 \\ H_{C,0} - H_{B,0} - \Delta h_2 \\ H_{C,0} - H_A - \Delta h_3 \\ H_{D,0} - H_{C,0} - \Delta h_4 \\ H_{D,0} - H_A - \Delta h_5 \\ H_{E,0} - H_A - \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{8}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti $\_\_ \times \_\_$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti ___ $\times$ ___:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{10}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Rešitev dobimo na osnovi rešitve sistema $\mathbf{N}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{t}$, torej prvo potrebujemo inverz $\mathbf{N}^{-1}$, ki je:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{11}$$

   Vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ dobimo kot:

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{12}$$

   Končne vrednosti neznank dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{13}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Vektor popravkov opazovanj izračunamo iz osnovnega matričnega modela izravnave, in sicer:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \\ \_\_\mathrm{mm} \end{bmatrix} \tag{14}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor dobimo kot:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{15}$$