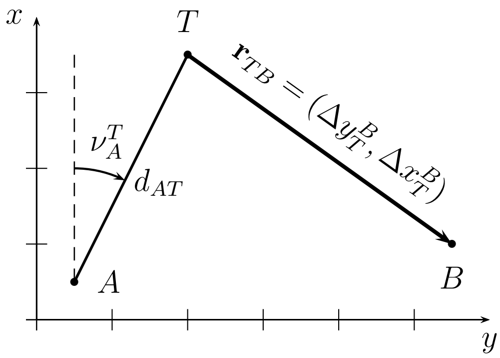
Posredna izravnava po MNK – Horizontalna geodetska mreža (položaj točke T):

Podane imamo koordinate dveh danih točk, in sicer $A(y_A, x_A) = (10.0\,\text{m}, 10.0\,\text{m})$ in $B(y_B, x_B) = (100.0\,\text{m}, 20.0\,\text{m})$. Da bi določili koordinate točke $T(y_T, x_T)$, smo na točki A izmerili smerni kot $\nu_A^T = 30°57'$ in dolžino $d_{AT} = 58.3\,\text{m}$, na točki T pa bazni vektor $\mathbf{r}_{TB} = (\Delta y_T^B, \Delta x_T^B) = (60.0\,\text{m}, -40.0\,\text{m})$ proti točki B. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno izravnavo izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T, x_T)$.



Slika 1: Določitev koordinat točke T na osnovi danih točk A in B ter opazovanj ν_A^T, d_{AT} in $\mathbf{r}_{TB}$

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

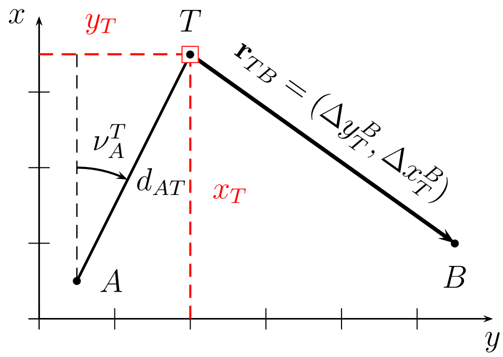
1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz podatkov naloge je razvidno, da imamo $n = \underline{\quad}$, $n_0 = \underline{\quad}$, $r = \underline{\quad}$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_{AT} \\ \nu_A^T \\ \Delta y_T^B \\ \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = \underline{\quad}$ neznank. Ker naloga zahteva izračun koordinat točke T, bomo za neznanki vzeli kar koordinati y_T in x_T, kot to prikazuje slika 2.

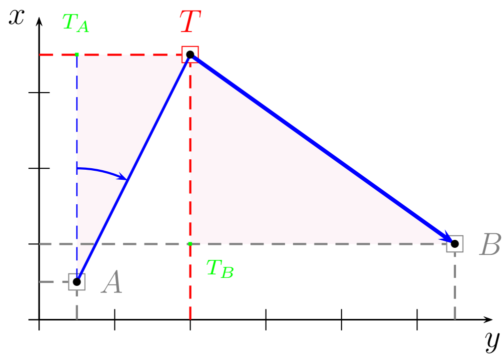


Slika 2: Izbira neznank pri obravnavani horizontalni geodetski mreži

Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
Pri nalogi obravnavamo horizontalno geodetsko mrežo, kjer imamo tri vrste opazovanj, to so: dolžina d_{AT}, smerni kot ν_A^T in komponenti baznega vektorja GNSS, Δy_T^B in Δx_T^B. Slika 3 prikazuje, kako geodetska opazovanja v geodetski mreži povežemo z neznankami, to so koordinate točke T. Na sliki so v sivi barvi izrisane dane količine (točki A in B, podane so koordinate teh dveh točk), v modri barvi so izrisana opazovanja, v rdeči barvi neznanki in v zeleni barvi ter pomanjšano dve pomožni točki, za sestavo trikotnikov, ki sta prikazana v bledi rdeči barvi. Zaradi jasnejšega prikaza obeh trikotnikov, oznake opazovanj in koordinatnih razlik niso prikazane.



Slika 3: Prikaz, kako so geodetska opazovanja povezana s koordinatami točk (neznankami) oz. s koordinatnimi razlikami med točkami

Iz slike 3 vidimo, da sta opazovana dolžina d_{AT} in smerni kot ν_A^T dve količini v pravokotnem trikotniku AT_AT, in sicer hipotenuza (d_{AT}) in kot (ν_A^T) pri točki A. Kateti tega pravokotnega trikotnika pa sta koordinatni razliki $\overline{T_AT} = y_T - y_A$ in $\overline{AT_A} = x_T - x_A$. Dolžino d_{AT} in smerni kot ν_A^T lahko s koordinatami obeh točk (A in T) oz. s katetami zato izrazimo kot:

$$\begin{aligned} d_{AT} &= \sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} \\ \nu_A^T &= \arctan\left(\frac{y_T - y_A}{x_T - x_A}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Po drugi strani pa na sliki 3 vidimo, da z opazovanim baznim vektorjem GNSS ($\mathbf{r}_{TB}$) lahko sestavimo pravokotni trikotnik BT_BT. Komponenti baznega vektorja Δy_T^B in Δx_T^B sta neposredno opazovani kateti tega trikotnika, kjer pa je potrebno paziti na predznak obeh opazovanj. Oznaka baznega vektorja $\mathbf{r}_{TB}$ in smer (puščica) na sliki 3 nakazuje, da "gremo" s točke T na točko B, torej:

$$\mathbf{r}_{TB} = \begin{bmatrix} \Delta y_T^B \\ \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_B - y_T \\ x_B - x_T \end{bmatrix} \tag{5}$$

Pri obravnavi geodetskih opazovanj v geodetski mreži pri posredni izravnavi po MNK je ključnega pomena poznavanje prehoda med ***geodetskim kartezičnim koordinatnim sistemom*** *in* ***geodetskim polarnim koordinatnim sistemom****. Večino geodetskih opazovanj lahko parametriziramo z neznankami na osnovi enačb prehoda med obema geodetskima sistemoma.*

Pri nalogi moramo sedaj sestaviti $n =$ ___ enačb popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Uporabimo seveda enačbi 4 in 5 in jih zapišemo tako, da vsi elementi enačb nastopajo na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{d}_{AT} - \sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{\nu}_A^T - \arctan\left(\frac{y_T - y_A}{x_T - x_A}\right) = 0 \\ F_3 &\equiv \Delta\hat{y}_T^B - y_B + y_T = 0 \\ F_4 &\equiv \Delta\hat{x}_T^B - x_B + x_T = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
   Približne vrednosti neznank moramo nastaviti, ker imamo nelinearne enačbe popravkov. Uporabili bomo najenostavnejši način, in sicer dane koordinate točke B in komponenti baznega vektorja Δy_T^B in Δx_T^B. Približni vrednosti koordinat $y_{T,0}$ in $x_{T,0}$ dobimo na osnovi enačbe 5:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_B - \Delta y_T^B \\ x_B - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\text{m} \\ \_\_\_\text{m} \end{bmatrix} \tag{7}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
   Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz 6 odvajati po obeh neznankah iz 3, velikost matrike $\mathbf{B}$ pa je ___ $\times$ ___. Parcialni odvodi enačbe popravkov F_1, po neznankah y_T in x_T sta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y_T} &= -\frac{y_T - y_A}{\sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2}} = -\frac{y_T - y_A}{d_{AT}} = -\sin\nu_A^T \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_T} &= -\frac{x_T - x_A}{\sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2}} = -\frac{x_T - x_A}{d_{AT}} = -\cos\nu_A^T \end{aligned} \tag{8}$$

V enačbi 8 je prikazano, da se parcialna odvoda enačbe popravkov za dolžino med dvema točkama lahko predstavita kot negativni vrednosti sinusa oz. kosinusa smernega kota med točkama. Geometrični prikaz je dokaj jasen iz slike 3, če obravnavamo pravokotni trikotnik AT_AT. Kaj je tudi posledica tega dejstva? Oba parcialna odvoda iz 8 sta brez enot, zato velikost geodetske mreže pri posredni izravnavi, ko merimo dolžine med točkami, nima vpliva na rezultate. Vpliva ima samo oblika geodetske mreže (kako so točke razporejene po ravnini)

Parcialni odvodi enačbe popravkov F_2 po obeh neznankah, pa sta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial y_T} &= -\frac{x_T - x_A}{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} = -\frac{x_T - x_A}{d_{AT}^2} = -\frac{\cos \nu_A^T}{d_{AT}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_T} &= \frac{y_T - y_A}{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} = \frac{y_T - y_A}{d_{AT}^2} = \frac{\sin \nu_A^T}{d_{AT}} \end{aligned} \tag{9}$$

V primeru smernih kotov med točkami, pa so parcialni odvodi iz enačbe 9 obratno sorazmerni z dolžino med točkami in premo sorazmerni s sinusom oz. kosinusom smernega kota. To pomeni, da v primeru merjenih smernih kotov, kar pomeni merjenih smeri in kotov, na rezultate vpliva tako velikost geodetske mreže (razdalje med točkami) kot tudi geometrija mreže (razporeditev točk v ravnini).

Pri zadnjih dveh enačbah, pri opazovanih baznih vektorjih, pa vidimo, da so parcialni odvodi enostavni. Velja:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y_T} = 1 \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x_T} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial F_4}{\partial y_T} = 0 \qquad \frac{\partial F_4}{\partial x_T} = 1 \tag{10}$$

Iz enačbe 10 je razvidno, da so parcialni odvodi baznih vektorjev po neznankah (koordinatah) lahko le 1 ali -1, v odvisnosti od usmerjenosti baznega vektorja. To pomeni, da v primeru geodetske mreže GNSS, na rezultate ne vplivata ne velikost kakor tudi ne geometrija geodetske mreže.

Matriko parcialnih odvodov $\mathbf{B}$ nastavimo tako, da izračunamo parcialne odvode vseh štirih enačb popravkov, uporabimo torej enačbe 8, 9 in 10. V dobljene izraze vstavimo približne vrednosti koordinat nove točke T, torej $y_{T,0}$ in $x_{T,0}$ iz enačbe 7 in izračunamo. Matrika $\mathbf{B}$ je enaka:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_T} & \frac{\partial F_1}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_T} & \frac{\partial F_2}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_T} & \frac{\partial F_3}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_4}{\partial y_T} & \frac{\partial F_4}{\partial x_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{11}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz 6. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov.

Dobimo:

$$
\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sqrt{(y_{T,0} - y_A)^2 + (x_{T,0} - x_A)^2} - d_{AT} \\ \arctan\left(\frac{y_{T,0} - y_A}{x_{T,0} - x_A}\right) - \nu_A^T \\ y_B - y_{T,0} - \Delta y_T^B \\ x_B - x_{T,0} - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{AT,0} - d_{AT} \\ \nu_A^{T,0} - \nu_A^T \\ \Delta y_{T,0}^B - \Delta y_T^B \\ \Delta x_{T,0}^B - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_ \\ \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{12}
$$

V enačbi 12 je prikazano, kako izračunamo odstopanja enačb popravkov iz enačbe 6, kjer $d_{AT,0}$ predstavlja vrednost izračunane dolžine med točkama A in T, če uporabimo približne vrednosti koordinat točke T, to sta $y_{T,0}$ in $x_{T,0}$. Na isti način dobimo $\nu_A^{T,0}$, smerni kot s točke A na točko T, $\Delta y_{T,0}^B$, koordinatno razliko po komponenti y s točke T na točko B, in $\Delta x_{T,0}^B$, koordinatno razliko po komponenti x s točke T na točko B, vsi pa so izračunani iz približnih koordinat točke T.

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Ko imamo izračunani matriki $\mathbf{P}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$, lahko izračunamo sistem normalnih enačb. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti ___ × ___:

$$
\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{13}
$$

   Izračunamo še vektor $\mathbf{t}$, ki je velikosti ___ × ___:

$$
\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{14}
$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$
\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{15}
$$

   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$
\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta y_T \\ \delta x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{16}
$$

   Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 7 izračunane iz opazovanj, končne neznanke dobimo kot:

$$
\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} y_{T,0} + \delta y_T \\ x_{T,0} + \delta x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{17}
$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 16, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 11 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 12 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_{d_{AT}} \\ v_{\nu_A^T} \\ v_{\Delta y_T^B} \\ v_{\Delta x_T^B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{18}$$

V enačbi 18 je popravek $v_{\nu_A^T}$ izračunan v radianih, lahko ga zapišemo v obliki $v_{\nu_A^T} = \_''$.

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 18) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{d}_{AT} \\ \hat{\nu}_A^T \\ \Delta\hat{y}_T^B \\ \Delta\hat{x}_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Tudi v enačbi 19 je izravnana vrednost kota $\hat{\nu}_A^T$ podana v radianih, lahko pa jo zapišemo kot: $\hat{\alpha} = \_^\circ\_'\_''$.

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Dodatne iteracije ne bomo delali.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga ne zahteva dodatnih izračunov.