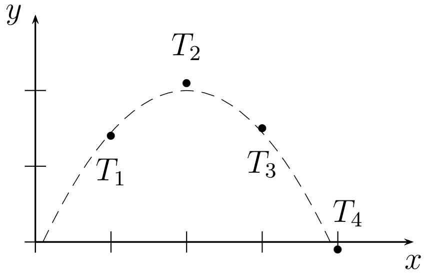
Posredna izravnava po MNK – Točke na paraboli:

V ravnini smo izmerili koordinate y štirim točkam in dobili: $T_1(1, 1.4)$, $T_2(2, 2.1)$, $T_3(3, 1.5)$ in $T_4(4, -0.1)$, koordinate x točk obravnavamo kot konstante. S posredno izravnavo po MNK določite parametre parabole, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1: Točke v ravnini, ki ležijo na paraboli

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

Postopek posredne izravnave sledi korakom iz datoteke *PosrednaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = \underline{\quad}$, $n_0 = \underline{\quad}$, $r = \underline{\quad}$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{1}$$

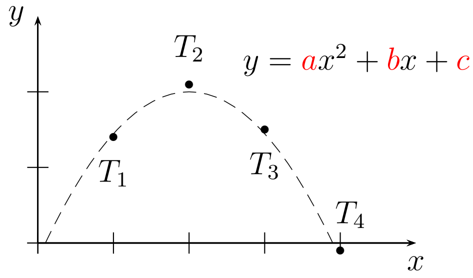
   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = \underline{\quad}$ neznank. Ker naloga zahteva izračun parabole, ki se optimalno prilega točkam, za neznanke izberemo parametre enačbe $y = ax^2 + bx + c$, torej a, b in c (glej sliko 2).

   Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{3}$$



Slika 2: Izbira neznank pri izračunu parabole, ki se optimalno prilega točkam

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
Sestavimo $n =$ ___ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - ax_1^2 - bx_1 - c = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - ax_2^2 - bx_2 - c = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - ax_3^2 - bx_3 - c = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{y}_4 - ax_4^2 - bx_4 - c = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to so a_0, b_0 in c_0. Ker so enačbe popravkov iz 4 linearne (ne glede na kvadrate koordinat x), bomo nastavili kar $a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{5}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz 4 odvajati po vseh neznankah iz 3. V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial c} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial c} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial c} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} & \frac{\partial F_4}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{6}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz 4. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_0x_1^2 + b_0x_1 + c_0 - y_1 \\ a_0x_2^2 + b_0x_2 + c_0 - y_2 \\ a_0x_3^2 + b_0x_3 + c_0 - y_3 \\ a_0x_4^2 + b_0x_4 + c_0 - y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{7}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti __ $\times$ __:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti __ $\times$ __:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ dobimo kot:

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{11}$$

Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 5 nastavljene na 0, smo v vektorju $\boldsymbol{\Delta}$ dobili kar končne vrednosti neznank, torej:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{12}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe 11, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 6 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 7 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{13}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 13) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{14}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Ker so enačbe popravkov iz 4 linearne, smo dobili točne rešitve, ni potrebe po ponovni iteraciji.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Zapišimo samo še iskano enačbo parabole, ki se optimalno prilega točkam:

$$y = ax^2 + bx + c = \_\_\_x^2 + \_\_\_x + \_\_\_ \tag{15}$$