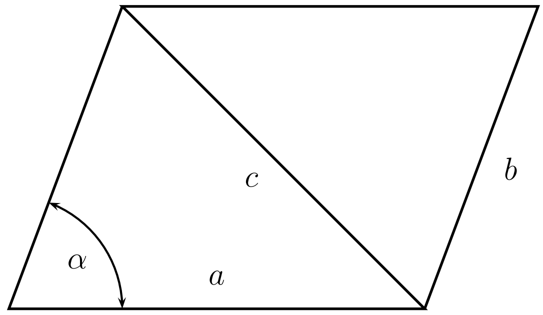
Posredna izravnava po MNK – Parcela oblike paralelograma:

Parcela ima obliko paralelograma, v kateri smo izmerili tri stranice in en kot, kot prikazuje slika 1. Opazovanja so : $a = 8.00\,\mathrm{m}$, $b = 6.00\,\mathrm{m}$, $c = 7.10\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = 5\,\mathrm{cm}$) in $\alpha = 60^\circ$ ($\sigma_\alpha = 30'$). Izravnaj opazovanja s posredno izravnavo po MNK in izračunaj površino parcele.



Slika 1: Skica parcele in izmerjenih opazovanj

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

Postopek posredne izravnave sledi korakom iz datoteke *PosrednaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n =$ ___, $n_0 =$ ___, $r =$ ___. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ sestavimo tako, da vnesemo opazovanja v vektor, dolžinska opazovanja v metrih in kotna v radianih:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{1}$$

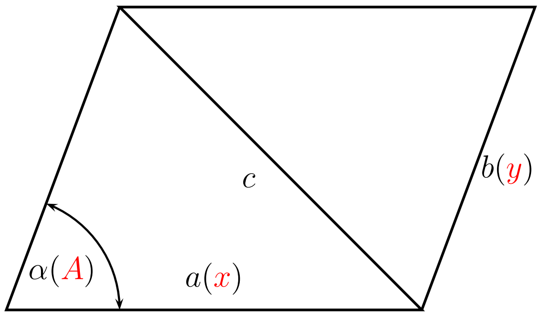
   Opazovanja so različne natančnosti, a med seboj nekorelirana. Variančno-kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ sestavimo podobno kot vektor opazovanj, pazimo na enote (kotna so v radianih):

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \_\_\mathrm{m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \_\_\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \_\_ \end{bmatrix} \tag{2}$$

Če si za referenčno varianco a-priori izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_c^2$, bo matrika uteži enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\quad} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\quad} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{3}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$. Izbrati moramo $u = n_0 = \underline{\quad}$ neznank. Neznanke bomo označili z x, y in A in so prikazane na sliki 2.



Slika 2: Izbira neznank pri obravnavani parceli

Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ A \end{bmatrix} \tag{4}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo. Sestavimo $n = \underline{\quad}$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Iz slike 2 vidimo, da imamo opazovanja pridobljena v paralelogramu, dejansko pa funkcionalni model sestavimo za splošni trikotnik, ki ga dobimo iz polovice paralelograma. Imamo opazovane vse tri stranice in kot, ki je nasproti stranice c. Pri enačbah popravkov izhajamo torej iz kosinusnega izreka, zapišemo jih tako, da so vsi elementi enačb na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - x = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{b} - y = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{c} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos A} = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{\alpha} - A = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Ker so enačbe popravkov nelinearne, izračunamo približne vrednosti neznank, to so x_0, y_0 in A_0. Uporabimo opazovanja in dobimo:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\mathrm{m} \\ \underline{\quad}\mathrm{m} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \tag{6}$$

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) **B** in vektor odstopanj enačb popravkov **f**. Za matriko **B** moramo vse enačbe popravkov iz 5 odvajati po vseh neznankah iz 4. V našem primeru je matrika **B** velikosti ___ × ___ in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial A} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial A} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial A} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x} & \frac{\partial F_4}{\partial y} & \frac{\partial F_4}{\partial A} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Parcialni odvodi so enostavni za enačbe popravkov F_1, F_2 in F_4, medtem ko so parcialni odvodi za enačbo popravkov F_3 enaki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial x} &= -\frac{x - y\cos A}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos A}} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y} &= -\frac{y - x\cos A}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos A}} \\ \frac{\partial F_3}{\partial A} &= -\frac{xy\sin A}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos A}} \end{aligned} \tag{8}$$

Končne vrednosti v matriki koeficientov **B** dobimo tako, da za izračun iz enačb 8 vzamemo približne vrednosti neznank x_0, y_0 in A_0 in dobimo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{9}$$

Za določitev vektorja odstopanj **f** izhajamo iz enačb popravkov iz 5. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \\ \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0\cos A_0} - c \\ A_0 - \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko **N** in vektor **t**.
Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko **N**, ki je velikosti ___ × ___:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{11}$$

Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti __ $\times$ __:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_ \\ \_\_ \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{12}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{13}$$

   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{14}$$

   V enačbi 14 je popravek kota δA izračunan v radianih, če ga izračunamo v kotnih enotah dobimo $\delta A = \_'\_''$.

   Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 6 izračunane iz opazovanj, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili male vrednosti, popravke približnim vrednostim neznank. Končne neznanke dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{15}$$

   Kot A, podan v kotnih enotah, je enak $A = \_^\circ\_'\_''$.

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe 14, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 9 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 10 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_ \end{bmatrix} \tag{16}$$

   V enačbi 16 je popravek kota v_α izračunan v radianih, če ga izračunamo v kotnih enotah dobimo $v_\alpha = \_'\_''$. Iz enačb popravkov (enačbe 5) velja, da je $\delta x = v_a$, $\delta y = v_b$ in $\delta A = v_\alpha$.

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 16) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \underline{\quad}\mathrm{m} \\ \underline{\quad}\mathrm{m} \\ \underline{\quad}\mathrm{m} \\ \underline{\quad}\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{17}$$

   Izravnana vrednost opazovanja $\hat{\alpha}$, podana v kotnih enotah, je $\hat{\alpha} = \_^\circ\_'\_''$. In tudi tu velja $x = \hat{a}$, $y = \hat{b}$ in $A = \hat{\alpha}$.

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Zadovoljimo se z rezultati ene iteracije.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Naloga zahteva, da izračunamo površino S parcele. Za izračun uporabimo ocenjene neznanke iz 15 in dobimo:

$$S = x\,y\,\sin A = \underline{\quad}\mathrm{m}^2 \tag{18}$$