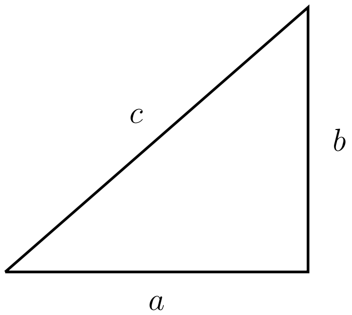
Posredna izravnava po MNK – Pravokotni trikotnik:

Opazovali smo stranice v pravokotnem trikotniku in dobili: $a = 216.7\,\mathrm{m}$, $b = 163.3\,\mathrm{m}$ in $c = 271.3\,\mathrm{m}$, kot prikazuje slika 1. Dolžine smo izmerili z razdaljemerom, ki ima podano natančnost kot $\sigma_d = 1.0\,\mathrm{cm} + 1.0\,\mathrm{cm}/100\,\mathrm{m}$. Izravnaj opazovanja s posredno izravnavo in določi površino trikotnika.



Slika 1: Skica pravokotnega trikotnika

Rešitev s postopkom posredne izravnave po MNK

Postopek posredne izravnave sledi korakom iz datoteke *PosrednaIzravnavaMNK.pdf*.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n =$ ___, $n_0 =$ ___, $r =$ ___ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Opazovanja so različne natančnosti, saj je izmerjena dolžina odvisna od velikosti dolžine. Izračun standardnih odklonov merjenih dolžin je enak:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 1.0\,\mathrm{cm} + 216.7\,\mathrm{m} \cdot 1.0\,\mathrm{cm}/100\,\mathrm{m} = \_\_\mathrm{cm} \\ \sigma_b &= 1.0\,\mathrm{cm} + 163.3\,\mathrm{m} \cdot 1.0\,\mathrm{cm}/100\,\mathrm{m} = \_\_\mathrm{cm} \\ \sigma_c &= 1.0\,\mathrm{cm} + 271.3\,\mathrm{m} \cdot 1.0\,\mathrm{cm}/100\,\mathrm{m} = \_\_\mathrm{cm} \end{aligned} \tag{2}$$

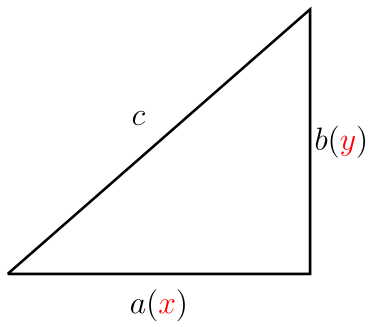
   Variančno-kovariančno matriko opazovanj $\boldsymbol{\Sigma}$ zato sestavimo kot:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{cm}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \_\_\mathrm{cm}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \_\_\mathrm{cm}^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

   Če si za referenčno varianco a-priori izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_c^2$, bo matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \_\_ & 0 & 0 \\ 0 & \_\_ & 0 \\ 0 & 0 & \_\_ \end{bmatrix} \tag{4}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$. Izbrati moramo $u = n_0 =$ ___ neznank. Za neznanki bomo vzeli obe kateti, kot prikazuje slika 2.



Slika 2: Izbira neznank pri obravnavanem pravokotnem trikotniku

Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo. Sestavimo $n =$ ___ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - x = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{b} - y = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{c} - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta x_0 in y_0. Enačbe popravkov iz 6 so nelinearne (tretja enačba), zato bomo nastavili približne vrednosti iz opazovanj, torej $x_0 = a$ in $y_0 = b$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{7}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz 6 odvajati po obeh neznankah iz 5. V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{8}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz 6. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \\ \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{9}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti __ $\times$ __:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{10}$$

   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti __ $\times$ __:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{11}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{12}$$

   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{13}$$

   Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi 7 izračunane iz opazovanj, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili male vrednosti, popravke priblžnim vrednostim. Končne neznanke dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{14}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe 13, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe 8 in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe 9 izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{15}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba 15) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba 1) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{16}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Ker so enačbe popravkov iz 6 nelinearne, moramo ugotoviti, ali potrebujemo še eno iteracijo. Ker so dobljeni popravki približnih vrednosti neznank iz enačbe 13 majhne v primerjavi z velikostjo trikotnika, bi lahko sklepali, da druge iteracije ne potrebujemo. Test: uporabimo izravnane vrednosti neznank kot približne vrednosti in ponovimo. Dobimo:

$$\mathbf{\Delta x}_{2i} = \begin{bmatrix} \delta x_{2i} \\ \delta y_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.26 \times 10^{-8}\mathrm{m} \\ -1.05 \times 10^{-7}\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{17}$$

kar je dejansko zanemarljivo. Ena iteracija je povsem dovolj.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga zahteva, da izračunamo površino S trikotnika. Za izračun uporabimo ocenjene neznanke iz 14 in dobimo:

$$S = \frac{x\,y}{2} = \_\_\mathrm{m}^2 \tag{18}$$