Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Študijski program 1. stopnje

Geodezija in geoinformatika, 1. letnik

IZRAVNALNI RAČUN 1 - VAJE
Posredna izravnava po MNK

Primeri računskih nalog z rešitvami

Oskar Sterle, 2025

Različica: 11. februar 2026

Kazalo vsebine

Kazalo slik

Kazalo preglednic

1 Posredna izravnava po MNK

Posredna izravnava po MNK predstavlja **posplošitev** in **poenostavitev** **posredne metode po MNK**, predstavljene v poglavju *Metoda najmanjših kvadratov (sistem enačb)*. Posplošitev bomo videli v tem, da bomo z enakim trudom reševali tako linearne kot tudi nelinearne (težje) probleme. Poenostavitev bomo videli v tem, da vse probleme rešimo po enakem (hitrejšem, enostavnejšem) postopku - matrično.

Pri posredni izravnavi po MNK bomo vse količine vodili v vektorski obliki. Imeli bomo vektor opazovanj $\mathbf{l}$, vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$, vsi vektorji pa so velikosti $n \times 1$ (število opazovanj smo označili z n). Vektorju opazovanj pripada variančno-kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$, s pomočjo katere na osnovi izbrane referenčne variance a-priori σ_0^2 izračunamo matriko kofaktorjev opazovanj $\mathbf{Q}$ in naknadno še matriko uteži $\mathbf{P}$. Vse matrike stohastičnega modela so velikosti $n \times n$.

1.1 Neznanke, uvedene v model

Pri posredni metodi MNK smo videli, da moramo v funkcionalni model uvesti $u = n_0$ neznank, ki jih v enačbah popravkov povežemo z (izravnanimi) opazovanji. Neznanke bomo označili z x_i ($i = 1, 2, \ldots, u$) in jih dali v vektor neznank $\mathbf{x}$, velikosti $u \times 1$. Kot bomo videli v poglavju o sestavi enačb popravkov (poglavje 1.2), bomo v postopku posredne izravnave vse enačbe popravkov linearizirali. Posledica tega je, da bomo morali vedno izračunati ali nastaviti približne vrednosti neznank. Le-te bomo označili z $x_{i,0}$ ($i = 1, 2, \ldots, u$) in jih dali v vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$, velikosti $u \times 1$. V splošnem se približne vrednosti neznank izračuna iz opazovanj.

Razliko med vektorjema $\mathbf{x}$ in $\mathbf{x}_0$ bomo označili z vektorjem $\mathbf{\Delta}$, ki bo vseboval popravke približnih vrednosti neznank δx_i ($i = 1, 2, \ldots, u$). Pri posredni izravnavi bomo imeli tri vektorje, ki se nanašajo na neznanke:

- Vektor (končnih) neznank: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_u \end{bmatrix}^\mathrm{T}$, ki ga ne poznamo in ga v postopku posredne izravnave izračunamo.
- Vektor približnih vrednosti neznank: $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} & x_{2,0} & x_{3,0} & \ldots & x_{u,0} \end{bmatrix}^\mathrm{T}$, ki ga izračunamo pred posredno izravnavo, ko v model uvedemo neznanke.
- Vektor popravkov približnih vrednosti neznank: $\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta x_1 & \delta x_2 & \delta x_3 & \ldots & \delta x_u \end{bmatrix}^\mathrm{T}$, ki predstavlja prvo rešitev v postopku posredne izravnave.

Povezava med vsemi tremi vektorji, ki se nanašajo na neznanke, je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} \qquad \leftrightarrow \qquad x_i = x_{i,0} + \delta x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, u) \tag{1–1}$$

Pri posredni izravnavi na začetku izračunamo približne vrednosti neznank ($\mathbf{x}_0$), v postopku posredne izravnave izračunamo popravke približnih vrednosti neznank ($\mathbf{\Delta}$), končne neznanke pa dobimo tako, da oba vektorja seštejemo z enačbo (1–1).

Ko računamo približnih vrednosti neznank se pojavi vprašanje, kako točno moramo le-te izračunati. Izkaže se, da velja:

- če imamo NELINEARNE enačbe popravkov, moramo približne vrednosti izračunati “čim bolj” točno, kar pomeni, da naj bodo čim bližje pravim, končnim vrednostim neznank. Če za izračun uporabimo kar opazovanja, so približne vrednosti izračunane dovolj točno.

- če imamo LINEARNE enačbe popravkov, pa približne vrednosti neznank ne vplivajo na rezultate. V tem primeru je povsem nepomembno, kakšne so njihove vrednosti, lahko so tudi vse enake 0 (nič).

V splošnem, če vedno izračunate približne vrednosti neznank, ne boste naredili napake.

1.2 Enačbe popravkov

Pri posredni izravnavi moramo sestaviti n enačb popravkov, s katerimi povežemo (izravnana) opazovanja z neznankami. Enačbe popravkov so v splošnem nelinearne, sestavimo pa jih tako, da se vsi elementi enačb nahajajo le na levi strani enačaja in na desni strani ostane samo še vrednost 0. Ta pogoj sicer ni nujen, ampak nam olajša izračun pravih predznakov vseh parcialnih odvodov v nadaljevanju. Enačbe popravkov imajo obliko:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{l}_1 - g_1(x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{l}_2 - g_2(x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{l}_3 - g_3(x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \\ &\vdots \qquad \vdots \\ F_n &\equiv \hat{l}_n - g_n(x_1, x_2, \ldots, x_u) = 0 \end{aligned} \tag{1–2}$$

Pravila za sestavo enačb popravkov so povsem enaka kot pri posredni metodi MNK (glej poglavje *Metoda najmanjših kvadratov (sistem enačb)*, tudi podpoglavje *Posredna metoda po MNK*), vsaka enačba popravkov vsebuje le eno opazovanje (na prvem mestu), v vseh enačbah pa moramo uporabiti vse neznanke. V enačbah (1–2) $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_u)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ predstavljajo (v splošnem nelinearne) funkcije, s katerimi matematično povežemo neznanke in izravnana opazovanja. Za rešitev posredne izravnave po MNK, moramo nelinearne enačbe pretvoriti v sistem linearnih enačb, uporabimo pa postopek linearizacije.

1.3 Linearizacija enačb popravkov

Enačbe popravkov iz (1–2) so v splošnem nelinearne, zato je izračun neznank $\mathbf{x}$ problematičen. Postopki reševanja sistemov nelinearnih enačb so komplicirani, temeljijo na iteracijskih postopkih, v katerih je pomembna približna vrednost neznank, na koncu pa lahko dobimo rešitev, ki ne bo predstavljala globalnega minimuma karakteristične funkcije. Zato enačbe popravkov lineariziramo.

Za prehod iz nelinearne v linearno obliko uporabimo linearizacijo na osnovi Taylorjeve vrste. Postopek linearizacije izvedemo za neznanke okoli njihovih približnih vrednosti $x_{i,0}$, s prirastkom neznank za vrednosti popravkov približnih vrednosti neznank δx_i. Pri razvoju enačb popravkov v Taylorjevo vrsto pa zanemarimo vse člene, kjer nastopajo popravki približnih vrednosti neznank s potenco 2 ali več. Poljubna (i-ta) enačba popravkov se linearizira na sledeč način:

$$F_i \equiv v_i + l_i + g_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0}) + \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial x_u}\delta x_u = 0 \tag{1–3}$$

Enačbo (1–3) bomo preuredili tako, da bodo na levi strani tiste količine, ki jih ne poznamo (so rezultat posredne izravnave), to so popravki opazovanj (v_i) in popravki približnih vrednosti neznank ($\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_u$), na desno stran pa bomo dali vse tiste količine, ki jih lahko izračunamo. To so opazovanja (l_i) in izračun funkcij (g_i) na osnovi približnih vrednosti neznank ($x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0}$). Preurejena enačba ima obliko:

$$F_i \equiv v_i + \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial x_u}\delta x_u = g_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0}) - l_i \tag{1–4}$$

Vidimo, da je enačba (1–4) v linearni obliki, saj so vse neznane količine (v_i in $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_u$) pomnožene le s konstantami (parcialni odvodi $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2, \ldots, u$) so izračunani iz približnih vrednosti neznank in so konstante). Ker je enačba linearna, jo lahko zapišemo v matrični obliki. Isto naredimo za vse enačbe popravkov iz enačbe (1–2), matrični zapis pa ima obliko:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_u} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \frac{\partial F_i}{\partial x_2} & & \ddots & \frac{\partial F_i}{\partial x_u} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{1–5}$$

Enačbo (1–5) lahko z ustreznimi oznakami matrik zapišemo kot:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f} \tag{1–6}$$

V enačbi (1–6) sta dodatno definirana dva elementa, in sicer:

- **B** matrika koeficientov (parcialnih odvodov) enačb popravkov, izračunana s približnimi vrednostmi neznank, velikosti $n \times u$ oz. $n \times n_0$ in
- **f** vektor odstopanj (prostih členov) enačb popravkov, velikosti $n \times 1$.

Glede na obliko vektorja **f** v enačbi (1–3) vidimo, da je vsak člen f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sestavljen iz dveh delov, in sicer $f_i = g_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0}) - l_i$. Če označimo $d_i = g_i(x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{u,0})$, potem lahko vektor **f** zapišemo kot razliko dveh vektorjev: $\mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l}$.

1.4 Rešitev posredne izravnave po MNK

Izhajamo iz osnovnega matričnega sistema posredne izravnave po MNK, ki je predstavljen v enačbi (1–6), tej enačbi rečemo tudi funkcionalni model posredne izravnave, saj enačba povezuje opazovanja z neznankami (preko funkcij). Ker imamo sistem n enačb, v katerih nastopa n popravkov opazovanj in u popravkov približnih vrednosti neznank, sistem ni enolično rešljiv. Pogoj, ki mu morajo popravki opazovanj zadostiti, je pogoj metode najmanjših kvadratov, ki je predstavljena s karakteristično funkcijo Φ:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} \Rightarrow \min. \tag{1–7}$$

kjer pa velja:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} \tag{1–8}$$

Če v enačbo (1–7) vnesemo enačbo (1–8) dobimo:

$$\Phi = (\mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}) \Rightarrow \min. \tag{1–9}$$

Najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ iz enačbe (1–9) bomo dobili, ko izračunamo odvod funkcije Φ po vektorju neznank $\mathbf{\Delta}$, odvod pa izenačimo z 0. Dobljen sistem se imenuje sistem normalnih enačb. Sestavljata ga matrika sistema normalnih enačb $\mathbf{N}_{u\times u}$ in vektor sistema normanih enačb $\mathbf{t}_{u\times 1}$, kjer velja:

$$\mathbf{N\Delta} = \mathbf{t} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{PB} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pf} \end{aligned} \tag{1–10}$$

Sistem normalnih enačb je enolično rešljiv, saj prestavlja sistem u enačb, v katerih nastopa u neznank. Rešitev posredne izravnave, oziroma rešitev funkcionalnega modela posredne izravnave so trije vektorji, in sicer:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{1–11}$$

1.5 Postopek izvedbe posredne izravnave po MNK

Postopek reševanja nalog s posredno izravnavo poteka zelo podobno kot postopek pri posredni metodi MNK, le da bomo tu izračune delali v matrični obliki. V nadaljevanju so predstavljeni koraki posredne izravnave.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo. Pravila za sestavo enačb popravkov so podana v pod-poglavju *Posredna metoda po MNK* poglavja *Metoda najmanjših kvadratov (sistem enačb)*. Dodatno pravilo, ki je pri posredni izravnavi zelo pomembno pa je, da so enačbe popravkov sestavljene tako, da se celotna enačba nahaja le na levi strani enačaja. Desna stran naj ima samo še vrednost 0. Pomembno je tudi, da se vsaka enačba popravkov začne z $\hat{l}_i$ – izravnano opazovanje ima vedno predznak + in nobenega koeficienta.

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Za izračun v splošnem uporabimo kar opazovanja, s tem dobimo dobre približne vrednosti neznank. Če pa so enačbe popravkov linearne, izbira približnih vrednosti neznank ne vpliva na rezultate, zato so lahko vse enake 0 (oziroma karkoli).

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$. Izračunamo vse parcialne odvode in tako nastavimo matriko $\mathbf{B}$. Izračunamo vsa odstopanja enačb popravkov in nastavimo vektor $\mathbf{f}$.

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.

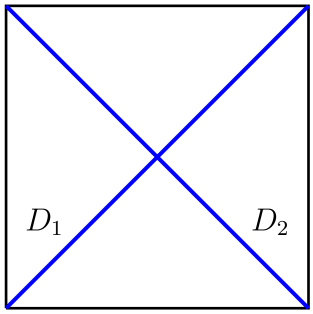
9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave. Drugo iteracijo naredimo tako, da za približne vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ uporabimo izravnane neznanke $\mathbf{x}$ in postopek ponovimo, od alineje 5 naprej.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (česar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.

1.6 Primer 1 – Diagonala kvadrata merjena 2-krat

V kvadratu smo izmerili diagonalo dvakrat, kot prikazuje slika 1–1, in dobili $D_1 = 5{,}2\,\mathrm{m}$ ter $D_2 = 5{,}1\,\mathrm{m}$.



Slika 1–1: Skica kvadrata in opazovanih diagonal v kvadratu

S posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj velikost kvadrata, če:

1. sta opazovanji enakih natančnosti in medseboj nekorelirani,
2. sta opazovanji različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0{,}2\,\mathrm{m}$, medseboj nekorelirani in za neznanko nastavimo stranico a in
3. sta opazovanji različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0{,}2\,\mathrm{m}$, medseboj nekorelirani, a za neznanko nastavimo površino S.

Opazovanji enakih natančnosti, medseboj nekorelirani, neznanka je diagonala D

V tem primeru imamo diagonali enakih natančnosti, ki sta medseboj nekorelirani. Za neznanko bomo nastavili diagonalo D. Postopek posredne izravnave sledi korakom iz poglavja 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = 2$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}2\,\mathrm{m} \\ 5{,}1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–12}$$
   Opazovanji sta enake natančnosti in medseboj nekorelirani, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ kar enotska matrika $\mathbf{I}$ velikosti 2×2:
$$\mathbf{P} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1–13}$$
2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Ker je minimalno število opazovanj, potrebnih za rešitev problema, enako $n_0 = 1$, uvedemo eno neznanko, v tem primeru diagonalo D. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 1×1 in ima obliko:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \tag{1–14}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 2$ enačb popravkov. Vsako opazovanje iz enačbe (1–12) predstavimo kot funkcijo uvedenih neznank iz enačbe (1–14). Enačbe nastavimo tako, da je celotna enačba na levi strani enačaja. Dobimo:
   $$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 - D = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 - D = 0 \end{aligned} \tag{1–15}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
   Nastaviti moramo približno vrednost neznanke D_0. Ker sta enačbi popravkov iz enačbe (1–15) linearni, izbira numerične vrednosti za D_0 ne vpliva na rezultate, zato je najbolj enostavno približno vrednost nastaviti kot:
   $$D_0 = 0{,}0\,\mathrm{m} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} D_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–16}$$

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$.
   Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov odvajati po vseh neznankah. V našem primeru torej obe enačbi popravkov iz enačbe (1–15) odvajamo po eni neznanki iz (1–14). Matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $n \times u$, torej 2×1 in ima obliko:
   $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial D} \\ \frac{\partial F_1}{\partial D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix} \tag{1–17}$$
   Za izračun vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov v (1–15). Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:
   $$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(D_1 - D_0) \\ -(D_2 - D_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}20\,\mathrm{m} \\ -5{,}10\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–18}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti $u \times u$, v našem primeru torej 1×1:
   $$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.00 \end{bmatrix} \tag{1–19}$$
   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti $u \times 1$, v našem primeru torej 1×1:
   $$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_1 D_1 + p_2 D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5{,}2\,\mathrm{m} + 1 \cdot 5{,}1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}30\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–20}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Rešimo sistem normalnih enačb in rešitev vektorja $\mathbf{\Delta}$ je:
   $$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta D \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{p_1 D_1 + p_2 D_2}{p_1 + p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 \cdot 5{,}2\,\mathrm{m} + 1 \cdot 5{,}1\,\mathrm{m}}{1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–21}$$

Vidimo, da smo dobili kar aritmetično sredino. Rezultat enak kot pri posredni in direktni metodi MNK, seveda, v vseh treh primerih gre za enak postopek. Vektor neznank $\mathbf{x}$ dobimo z:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} D_0 + \delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0\,\mathrm{m} + 5{,}15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–22}$$

Ker je bila približna vrednost neznanke $D_0 = 0$, smo v vektorju $\boldsymbol{\Delta}$ dobili kar končno vrednost neznanke $D = \delta D$.

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe (1–21), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–17) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–18) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}20\,\mathrm{m} - (-1.0 \cdot 5{,}15\,\mathrm{m}) \\ -5{,}10\,\mathrm{m} - (-1.0 \cdot 5{,}15\,\mathrm{m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}05\,\mathrm{m} \\ 0{,}05\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–23}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–23)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–12)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{D}_1 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}15\,\mathrm{m} \\ 5{,}15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–24}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Ker so enačbe popravkov linearne, smo dobili že končne rezultate. Ponovno iteracijo bi delali takrat, ko bi imeli nelinearne enačbe popravkov in slabe približne vrednosti neznank.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga ne zahteva kakšnega dodatnega izračuna.

Opazovanji različnih natančnosti, medseboj nekorelirani, neznanka je diagonala a

V tem primeru imamo diagonali različnih natančnosti, a medseboj nekorelirana. Za neznanko bomo nastavili stranico a. Postopek posredne izravnave sledi korakom iz poglavja 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = 2$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}2\,\mathrm{m} \\ 5{,}1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–25}$$

Opazovanji sta različnih natančnosti ($\sigma_1 = 0{,}1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0{,}2\,\mathrm{m}$) in medseboj nekorelirani, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4{,}0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–26}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
Ker je minimalno število opazovanj, potrebnih za rešitev problema, enako $n_0 = 1$, uvedemo eno neznanko, v tem primeru stranico a. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 1×1 in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \tag{1–27}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 2$ enačb popravkov. Vsako opazovanje iz (1–25) predstavimo kot funkcijo uvedenih neznank iz enačbe (1–27). Enačbe nastavimo tako, da je celotna enačba na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 - \sqrt{2}\,a = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 - \sqrt{2}\,a = 0 \end{aligned} \tag{1–28}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
   Nastaviti moramo približno vrednost neznanke a_0. Ker sta enačbi popravkov iz (1–28) linearni, izbira numerične vrednosti za a_0 ne vpliva na rezultate, zato je najbolj enostavno približno vrednost nastaviti kot:

$$a_0 = 0{,}0\,\mathrm{m} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–29}$$

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
   Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov odvajati po vseh neznankah. V našem primeru torej obe enačbi popravkov iz (1–28) odvajamo po eni neznanki iz (1–27). Matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $n \times u$, torej 2×1 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} \\ \frac{\partial F_1}{\partial a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}4142 \\ -1{,}4142 \end{bmatrix} \tag{1–30}$$

   Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(D_1 - \sqrt{2}\,a_0) \\ -(D_2 - \sqrt{2}\,a_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}20\,\mathrm{m} \\ -5{,}10\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–31}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti $u \times u$, v našem primeru torej 1×1:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2p_1 + 2p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4{,}0 + 2 \cdot 1{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}00 \end{bmatrix} \tag{1–32}$$

   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti $u \times 1$, v našem primeru torej 1×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}p_1 D_1 + \sqrt{2}p_2 D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}0\sqrt{2}\,5{,}2\,\mathrm{m} + 1{,}0\sqrt{2}\,5{,}1\,\mathrm{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36{,}628\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–33}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Rešimo sistem normalnih enačb in rešitev vektorja $\boldsymbol{\Delta}$ je:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta a \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{p_1 D_1 + p_2 D_2}{p_1 + p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4{,}0 \cdot 5{,}2\,\mathrm{m} + 1{,}0 \cdot 5{,}1\,\mathrm{m}}{4{,}0 + 1{,}0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}663\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–34}$$

Vidimo, da smo za rezultat dobili uteženo sredino opazovanj (diagonal), ki jo s faktorjem $1/\sqrt{2}$ pretvorimo v neznano stranico. Rezultat enak kot pri posredni in direktni metodi MNK, seveda, v vseh treh primerih gre za enak postopek. Vektor neznank $\mathbf{x}$ dobimo z:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} a_0 + \delta a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0\,\text{m} + 3{,}663\,\text{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}663\,\text{m} \end{bmatrix} \tag{1–35}$$

Ker je bila približna vrednost neznanke $a_0 = 0$, smo v vektorju $\boldsymbol{\Delta}$ dobili kar končno vrednost neznanke $a = \delta a$.

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$ iz enačbe (1–34), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–30) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–31) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}20\,\text{m} - (-1{,}4142 \cdot 3{,}663\,\text{m}) \\ -5{,}10\,\text{m} - (-1{,}4142 \cdot 3{,}663\,\text{m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}02\,\text{m} \\ 0{,}08\,\text{m} \end{bmatrix} \tag{1–36}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–36)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–25)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{D}_1 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}18\,\text{m} \\ 5{,}18\,\text{m} \end{bmatrix} \tag{1–37}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Ker so enačbe popravkov linearne, smo dobili že končne rezultate. Ponovno iteracijo bi delali takrat, ko bi imeli nelinearne enačbe popravkov in slabe približne vrednosti neznank.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Izračunajmo tu površino kvadrata iz izravnane neznanke a:

$$S = a^2 = 13{,}416200\,\text{m}^2 \tag{1–38}$$

Opazovanji različnih natančnosti, medseboj nekorelirani, neznanka je površina S

V tem primeru imamo diagonali različnih natančnosti, a medseboj nekorelirana. Za neznanko bomo nastavili površino kvadrata S, s čimer bomo pokazali, da izbira neznanke ne vpliva na končne rezultate. Postopek posredne izravnave sledi korakom iz poglavja 1.5.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = 2$. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}2\,\text{m} \\ 5{,}1\,\text{m} \end{bmatrix} \tag{1–39}$$

Opazovanji sta različnih natančnosti ($\sigma_1 = 0{,}1\,\text{m}$ in $\sigma_2 = 0{,}2\,\text{m}$) in medseboj nekorelirani, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4{,}0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–40}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Ker je minimalno število opazovanj, potrebnih za rešitev problema, enako $n_0 = 1$, uvedemo eno neznanko, v tem primeru površino S. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 1×1 in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \tag{1–41}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 2$ enačb popravkov. Vsako opazovanje iz (1–39) predstavimo kot funkcijo uvedenih neznank iz enačbe (1–41). Enačbe nastavimo tako, da je celotna enačba na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 - \sqrt{2\,S} = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 - \sqrt{2\,S} = 0 \end{aligned} \tag{1–42}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
   Nastaviti moramo približno vrednost neznanke S_0. Sedaj pa vidimo, da enačbi popravkov iz (1–42) nista linearni (neznanka je pod korenom), zato je potrebno približne vrednosti izračunati iz opazovanj. Uporabimo:

$$S_0 = \frac{D_1^2}{2} = 13{,}52\,\mathrm{m}^2 \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13{,}52\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–43}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
   Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov odvajati po vseh neznankah. V našem primeru torej obe enačbi popravkov iz (1–42) odvajamo po eni neznanki iz (1–41). Matrika $\mathbf{B}$ je velikosti $n \times u$, torej 2×1 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial S} \\ \frac{\partial F_1}{\partial S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2\,S_0}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2\,S_0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1923 \\ -0{,}1923 \end{bmatrix} \tag{1–44}$$

   Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov. Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -(D_1 - \sqrt{2\,S_0}) \\ -(D_2 - \sqrt{2\,S_0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}10\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–45}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti $u \times u$, v našem primeru torej 1×1:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0{,}18 \end{bmatrix} \tag{1–46}$$

   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti $u \times 1$, v našem primeru torej 1×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0{,}0192\,\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{1–47}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Rešimo sistem normalnih enačb in rešitev vektorja $\mathbf{\Delta}$ je:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix}\delta S\end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix}-0{,}104\,\mathrm{m}^2\end{bmatrix} \tag{1–48}$$

   Za rezultat dobimo majhno vrednost, saj predstavlja samo popravek približne vrednosti povšine S_0 iz enačbe (1–43). Vektor neznank $\mathbf{x}$ in končno vrednost neznanke (S) dobimo z:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix}S_0 + \delta S\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13{,}52\,\mathrm{m} - 0.104\mathrm{m}^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13{,}416\,\mathrm{m}^2\end{bmatrix} \tag{1–49}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–48), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–44) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–45) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} = \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}00\,\mathrm{m} - (-0{,}1923 \cdot (-0{,}104\,\mathrm{m}))\\ 0{,}10\,\mathrm{m} - (-0{,}1923 \cdot (-0{,}104\,\mathrm{m}))\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0{,}02\,\mathrm{m}\\ 0{,}08\,\mathrm{m}\end{bmatrix} \tag{1–50}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–50)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–39)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix}\hat{D}_1\\ \hat{D}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5{,}18\,\mathrm{m}\\ 5{,}18\,\mathrm{m}\end{bmatrix} \tag{1–51}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Enačbe popravkov so bile nelinearne, zato se pojavi vprašanje, ali je potrebno izvesti še eno iteracijo. V primeru poglavja (1.6), ko smo za neznanko vzeli stranico a, smo izračunano površino dobili (glej enačbo (1–38)) $S_a = 13{,}416200\,\mathrm{m}^2$. V tem primeru, ko pa smo za neznanko vzeli kar površino S, pa smo dobili (enačba (1–49)) $S_S = 13{,}416000\,\mathrm{m}^2$. Razlika je torej $\Delta S = 13{,}416200\,\mathrm{m}^2 - 13{,}416000\,\mathrm{m}^2 = 0{,}000200\,\mathrm{m}^2$.

    Razlika nastane zato, ker smo pri linearizaciji enačb popravkov zanemarili vse člene višjih redov. Rešitev je v tem, da končno izravnano vrednost površine $S_S = 13{,}416000\,\mathrm{m}^2$ iz enačbe (1–49) vzamemo za približno vrednost neznanke v enačbi (1–43) in ponovimo postopek.

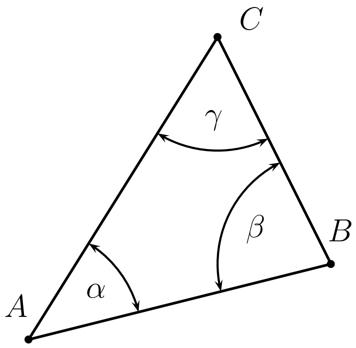
    Ta primer kaže na dva zelo pomembna zaključka. Prvič, izbira neznanke ne vpliva na rezultate. Drugič, splača se izbrati take neznanke, da bo izračun čim bolj enostaven.

    Na koncu tudi še en pomemben vidik, in sicer, ali izvedemo še eno iteracijo je odvisno od tega, kakšno napako smo naredili. Če nam razlika v površini $\Delta S = 0{,}000200\,\mathrm{m}^2$ predstavlja zanemarljivo malo, druge iteracije seveda ne delamo.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Naloga ne zahteva kakšnega dodatnega izračuna.

1.7 Primer 2 - Merjeni vsi koti trikotnika

V trikotniku smo izmerili vse tri notranje kote in dobili: $\alpha = 41°33'$, $\beta = 78°57'$ in $\gamma = 59°27'$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja.



Slika 1–2: Skica trikotnika in vseh notranjih kotov

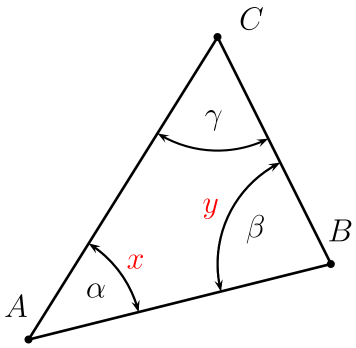
1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = 3$, $n_0 = 2$, $r = 1$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41°33' \\ 78°57' \\ 59°27' \end{bmatrix} \tag{1–52}$$

   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–53}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = 2$ neznank. Izbrali bomo dva neznana kota, kot prikazuje slika 1–3, neznanki pa označili z x in y. Neznanka x predstavlja kot α, medtem kot neznanka y kot β. Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 2×1 in ima obliko:



Slika 1–3: Izbira neznank v trikotniku, ko merimo notranje kote

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1–54}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 3$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha} - x = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{\beta} - y = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{\gamma} + x + y - 180° = 0 \end{aligned} \tag{1–55}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta x_0 in y_0. Ker so enačbe popravkov iz (1–55) linearne, bomo nastavili kar $x_0 = y_0 = 0°$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0° \\ 0° \end{bmatrix} \tag{1–56}$$

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz (1–55) odvajati po obeh neznankah iz (1–54). V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti 3×2 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & -1{,}0 \\ 1{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–57}$$

   Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz (1–55). Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_0 - \alpha \\ y_0 - \beta \\ 180° - x_0 - y_0 - \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41°33{,}0' \\ -78°57{,}0' \\ 120°33{,}0' \end{bmatrix} \tag{1–58}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti 2×2:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2{,}0 & 1{,}0 \\ 1{,}0 & 2{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–59}$$

   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti 2×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 162°6{,}0' \\ 199°30{,}0' \end{bmatrix} \tag{1–60}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}6667 & -0{,}3333 \\ -0{,}3333 & 0{,}6667 \end{bmatrix} \tag{1–61}$$

Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41°34{,}0' \\ 78°58{,}0' \end{bmatrix} \tag{1–62}$$

Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi (1–56) nastavljene na 0, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili kar končne vrednosti neznank, torej:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41°34{,}0' \\ 78°58{,}0' \end{bmatrix} \tag{1–63}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–62), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–57) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–58) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0' \\ 1{,}0' \\ 1{,}0' \end{bmatrix} \tag{1–64}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–64)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–52)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

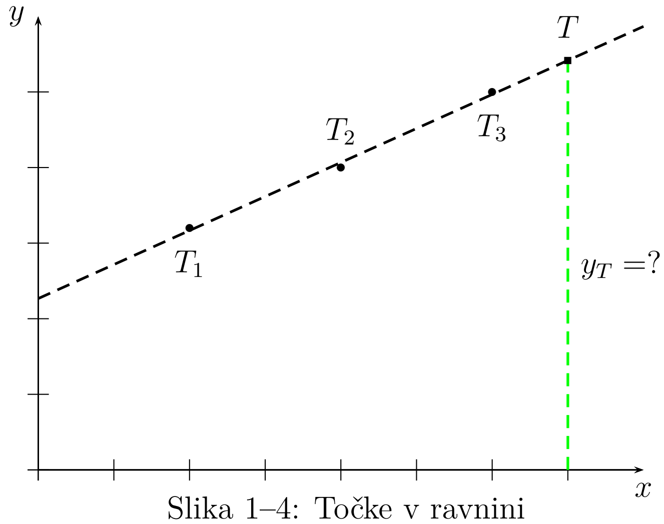
$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 41°34{,}0' \\ 78°58{,}0' \\ 59°28{,}0' \end{bmatrix} \tag{1–65}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Ker so enačbe popravkov iz (1–55) linearne, smo dobili točne rešitve, ni potrebe po ponovni iteraciji.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga ne zahteva kakšnega dodatnega izračuna.

1.8 Primer 3 - Premica v ravnini

V ravnini imamo tri točke, za katere imamo dane koordinate x, koordinate y pa so opazovane, $T_1(x_1; y_1) = (2{,}0; 3{,}2)$, $T_2(x_2; y_2) = (4{,}0; 4{,}0)$ in $T_3(x_3; y_3) = (6{,}0; 5{,}0)$, kot prikazuje slika 1–4. Če je bila koordinata y_3 izmerjena dvakrat bolj natančno kot ostali dve, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice, ki se optimalno prilega podanim točkam. Izračunaj koordinato y_T za točko T, ki ima $x_T = 7{,}0$.



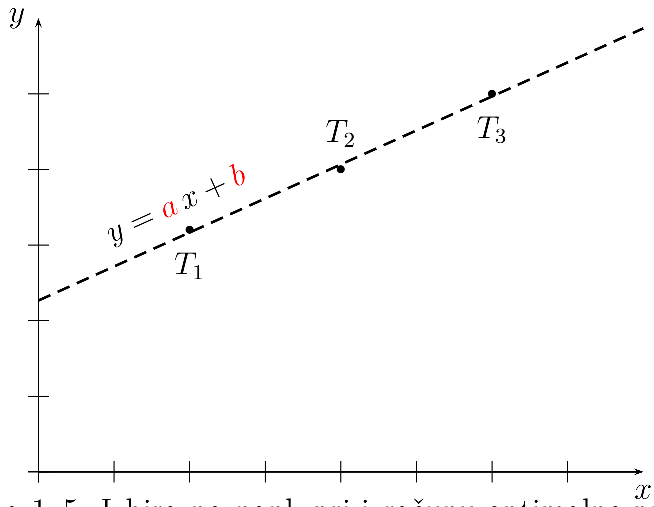
Slika 1–4: Točke v ravnini

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = 3$, $n_0 = 2$, $r = 1$ in:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}2 \\ 4{,}0 \\ 5{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–66}$$
   Opazovanja so različne natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–67}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = 2$ neznank. Ker naloga zahteva izračun premice, ki se optimalno prilega točkam, je najbolj smiselno nastaviti parametra premice, to sta naklonski koeficient a in prosti člen b.

   Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 2×1 in ima obliko:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{1–68}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 3$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - a\,x_1 - b = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - a\,x_2 - b = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - a\,x_3 - b = 0 \end{aligned} \tag{1–69}$$



Slika 1–5: Izbira neznank pri izračunu optimalne premice

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta a_0 in b_0. Ker so enačbe popravkov iz (1–69) linearne, bomo nastavili kar $a_0 = b_0 = 0$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1–70}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz (1–69) odvajati po obeh neznankah iz (1–68). V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti 3×2 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 & -1 \\ -x_2 & -1 \\ -x_3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}0 & -1{,}0 \\ -4{,}0 & -1{,}0 \\ -6{,}0 & -1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–71}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz (1–69). Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_0\,x_1 + b_0 - y_1 \\ a_0\,x_2 + b_0 - y_2 \\ a_0\,x_3 + b_0 - y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}20 \\ -4{,}00 \\ -5{,}00 \end{bmatrix} \tag{1–72}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti 2×2:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 164{,}0 & 30{,}0 \\ 30{,}0 & 6{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–73}$$

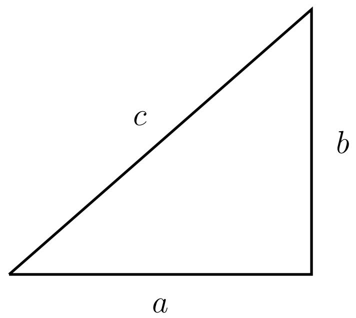
Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti 2×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 142{,}40 \\ 27{,}20 \end{bmatrix} \tag{1–74}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:
$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0714 & -0{,}3571 \\ -0{,}3571 & 1{,}9524 \end{bmatrix} \tag{1–75}$$
   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:
$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4571 \\ 2{,}2476 \end{bmatrix} \tag{1–76}$$
   Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi (1–70) nastavljene na 0, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili kar končne vrednosti neznank, torej:
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4571 \\ 2{,}2476 \end{bmatrix} \tag{1–77}$$
8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–76), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–71) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–72) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:
$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}038 \\ 0{,}076 \\ -0{,}010 \end{bmatrix} \tag{1–78}$$
9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–78)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–66)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:
$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3{,}162 \\ 4{,}076 \\ 4{,}990 \end{bmatrix} \tag{1–79}$$
10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Ker so enačbe popravkov iz (1–69) linearne, smo dobili točne rešitve, ni potrebe po ponovni iteraciji.
11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Naloga zahteva, da izračunamo (interpolirano) koordinato y_T točke T, kjer je $x_T = 7{,}0$. Za izračun uporabimo ocenjene neznanke iz (1–77) in dobimo:
$$y_T = a\,x_T + b = 5{,}448 \tag{1–80}$$

1.9 Primer 4 - Pravokotni trikotnik

Opazovali smo stranice v pravokotnem trikotniku in dobili: $a = 216{,}7\,\mathrm{m}$, $b = 163{,}3\,\mathrm{m}$ in $c = 271{,}3\,\mathrm{m}$, kot prikazuje slika 1–6. Dolžine smo izmerili z razdaljemerom, ki ima podano natančnost kot $\sigma_d = 1{,}0\,\mathrm{cm} + 1{,}0\,\mathrm{cm}/100\,\mathrm{m}$. Izravnaj opazovanja s posredno izravnavo in določi površino trikotnika.



Slika 1–6: Skica pravokotnega trikotnika

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = 3$, $n_0 = 2$, $r = 1$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216{,}7\,\mathrm{m} \\ 163{,}3\,\mathrm{m} \\ 271{,}3\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–81}$$

   Opazovanja so različne natančnosti, saj je izmerjena dolžina odvisna od velikosti dolžine. Izračun standardnih odklonov merjenih dolžin je enak:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= 1{,}0\,\mathrm{cm} + 216{,}7\,\mathrm{m} \cdot 1{,}0\,\mathrm{cm}/100\,\mathrm{m} = 3{,}167\,\mathrm{cm} \\ \sigma_b &= 1{,}0\,\mathrm{cm} + 163{,}3\,\mathrm{m} \cdot 1{,}0\,\mathrm{cm}/100\,\mathrm{m} = 2{,}633\,\mathrm{cm} \\ \sigma_c &= 1{,}0\,\mathrm{cm} + 271{,}3\,\mathrm{m} \cdot 1{,}0\,\mathrm{cm}/100\,\mathrm{m} = 3{,}713\,\mathrm{cm} \end{aligned} \tag{1–82}$$

   Variančno-kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ zato sestavimo kot:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 10{,}03\,\mathrm{cm}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}93\,\mathrm{cm}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 13{,}79\,\mathrm{cm}^2 \end{bmatrix} \tag{1–83}$$

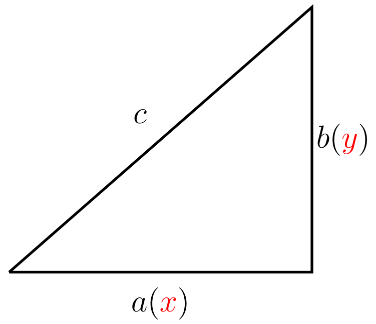
   Če si za referenčno varianco a-priori izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_c^2$, bo matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}37 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}99 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}00 \end{bmatrix} \tag{1–84}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = 2$ neznank. Za neznanki bomo vzeli obe kateti, kot prikazuje slika 1–7.

   Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 2×1 in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1–85}$$



Slika 1–7: Izbira neznank pri obravnavanem pravokotnem trikotniku

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 3$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - x = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{b} - y = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{c} - \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{aligned} \tag{1–86}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta x_0 in y_0. Enačbe popravkov iz (1–86) so nelinearne (tretja enačba), zato bomo nastavili približne vrednosti iz opazovanj, torej $x_0 = a$ in $y_0 = b$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216{,}70\,\mathrm{m} \\ 163{,}30\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–87}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz (1–86) odvajati po obeh neznankah iz (1–85). V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti 3×2 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & -1{,}0000 \\ -0{,}7986 & -0{,}6018 \end{bmatrix} \tag{1–88}$$

   Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz (1–86). Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \\ \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0000\,\mathrm{m} \\ 0{,}0000\,\mathrm{m} \\ 0{,}0407\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–89}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko

$\mathbf{N}$, ki je velikosti 2×2:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2{,}0123 & 0{,}4806 \\ 0{,}4806 & 2{,}3508 \end{bmatrix} \tag{1–90}$$

Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti 2×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0{,}0325\,\mathrm{m} \\ -0{,}0245\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–91}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5224 & -0{,}1068 \\ -0{,}1068 & 0{,}4472 \end{bmatrix} \tag{1–92}$$

   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0144\,\mathrm{m} \\ -0{,}0075\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–93}$$

   Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi (1–87) izračunane iz opazovanj, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili male vrednosti, popravke priblžnim vrednostim. Končne neznanke dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216{,}6856\,\mathrm{m} \\ 163{,}2925\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–94}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–93), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–88) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–89) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0144\,\mathrm{m} \\ -0{,}0075\,\mathrm{m} \\ 0{,}0247\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–95}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–95)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–81)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 216{,}6856\,\mathrm{m} \\ 163{,}2925\,\mathrm{m} \\ 271{,}3247\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–96}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Ker so enačbe popravkov iz (1–86) nelinearne, moramo ugotoviti, ali potrebujemo še eno iteracijo. Ker so dobljeni popravki približnih vrednosti neznank iz enačbe (1–93) majhne v primerjavi z velikostjo trikotnika, bi lahko sklepali, da druge iteracije ne potrebujemo. A vseeno naredimo test: uporabimo izravnane vrednosti neznank kot približne vrednosti in ponovimo izravnavo. Dobimo popravke približnih vrednosti neznank 2. iteracije:

$$\mathbf{\Delta x}_{2i} = \begin{bmatrix} \delta x_{2i} \\ \delta y_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9{,}26 \times 10^{-8}\mathrm{m} \\ -1{,}05 \times 10^{-7}\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–97}$$

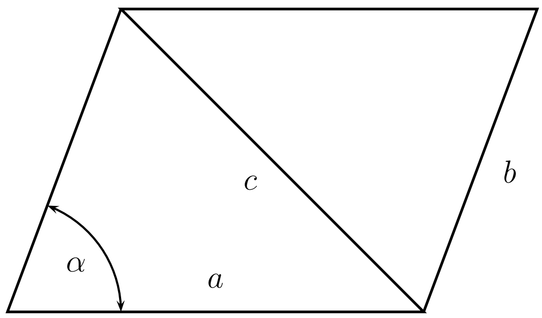
    kar je dejansko zanemarljivo. Ena iteracija je povsem dovolj.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga zahteva, da izračunamo površino S trikotnika. Za izračun uporabimo ocenjene neznanke iz (1–94) in dobimo:

$$S = \frac{x\,y}{2} = 17\,691{,}57\,\mathrm{m}^2 \tag{1–98}$$

1.10 Primer 5 - Parcela oblike paralelograma

Parcela ima obliko paralelograma, v kateri smo izmerili tri stranice in en kot, kot prikazuje slika 1–8. Opazovanja so : $a = 8{,}00\,\mathrm{m}$, $b = 6{,}00\,\mathrm{m}$, $c = 7{,}10\,\mathrm{m}$ ($\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = 5\,\mathrm{cm}$) in $\alpha = 60°$ ($\sigma_\alpha = 30'$). Izravnaj opazovanja s posredno izravnavo po MNK in izračunaj površino parcele.

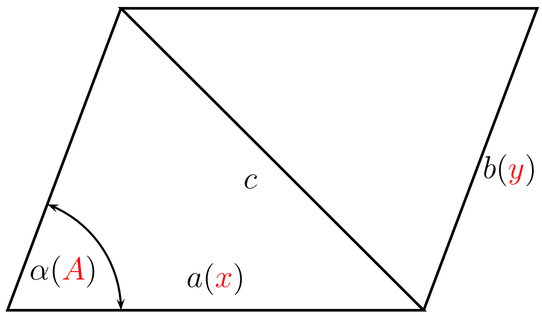


Slika 1–8: Skica parcele in izmerjenih opazovanj

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = 4$, $n_0 = 3$, $r = 1$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ sestavimo tako, da vnesemo opazovanja v vektor, dolžinska opazovanja v metrih in kotna v radianih:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}00\,\mathrm{m} \\ 6{,}00\,\mathrm{m} \\ 7{,}10\,\mathrm{m} \\ 1{,}04719755 \end{bmatrix} \tag{1–99}$$
   Opazovanja so različne natančnosti, a med seboj nekorelirana. Variančno-kovariančno matriko opazovanj $\mathbf{\Sigma}$ sestavimo podobno kot vektor opazovanj, pazimo na enote (kotna so v radianih):
   $$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0025\,\mathrm{m}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0025\,\mathrm{m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0025\,\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}00007615 \end{bmatrix} \tag{1–100}$$
   Če si za referenčno varianco a-priori izberemo $\sigma_0^2 = \sigma_c^2$, bo matrika uteži enaka:
   $$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32{,}8 \end{bmatrix} \tag{1–101}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = 3$ neznank. Neznanke bomo označili z x, y in A in so prikazane na sliki 1–9.

   Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 3×1 in ima obliko:
   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ A \end{bmatrix} \tag{1–102}$$



Slika 1–9: Izbira neznank pri obravnavani parceli

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 4$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. S slike 1–9 vidimo, da imamo opazovanja pridobljena v paralelogramu, dejansko pa funkcionalni model sestavimo za splošni trikotnik, ki ga dobimo iz polovice paralelograma. Imamo opazovane vse tri stranice in kot, ki je nasproti stranice c. Pri enačbah popravkov izhajamo torej iz kosinusnega izreka, zapišemo jih tako, da so vsi elementi enačb na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - x = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{b} - y = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{c} - \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos A} = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{\alpha} - A = 0 \end{aligned} \tag{1–103}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Ker so enačbe popravkov nelinearne, izračunamo približne vrednosti neznank, to so x_0, y_0 in A_0. Uporabimo opazovanja in dobimo:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}00\,\mathrm{m} \\ 6{,}00\,\mathrm{m} \\ 1{,}04719755 \end{bmatrix} \tag{1–104}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz (1–103) odvajati po vseh neznankah iz (1–102). V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ velikosti 4×3 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial A} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial A} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial A} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x} & \frac{\partial F_4}{\partial y} & \frac{\partial F_4}{\partial A} \end{bmatrix} \tag{1–105}$$

   Parcialni odvodi so enostavni za enačbe popravkov F_1, F_2 in F_4, medtem ko so parcialni odvodi za enačbo popravkov F_3 enaki:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_3}{\partial x} &= -\frac{x - y\cos A}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos A}}\\
\frac{\partial F_3}{\partial y} &= -\frac{y - x\cos A}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos A}}\\
\frac{\partial F_3}{\partial A} &= -\frac{xy\sin A}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos A}}
\end{aligned}
\tag{1–106}
$$

Končne vrednosti v matriki koeficientov **B** dobimo tako, da za izračun iz enačb (1–106) vzamemo približne vrednosti neznank x_0, y_0 in A_0 in dobimo:

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & -1{,}0000 & 0{,}0000 \\ -0{,}6934 & -0{,}2774 & -5{,}7646 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & -1{,}0000 \end{bmatrix}
\tag{1–107}
$$

Za določitev vektorja odstopanj **f** izhajamo iz enačb popravkov iz (1–103). Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$
\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \\ \sqrt{x_0^2+y_0^2-2x_0y_0\cos A_0} - c \\ A_0 - \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0000\,\mathrm{m} \\ 0{,}0000\,\mathrm{m} \\ 0{,}1111\,\mathrm{m} \\ 0{,}00000000 \end{bmatrix}
\tag{1–108}
$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko **N** in vektor **t**.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko **N**, ki je velikosti 3×3:

$$
\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1{,}4808 & 0{,}1923 & 3{,}9970 \\ 0{,}1923 & 1{,}0769 & 1{,}5988 \\ 3{,}9970 & 1{,}5988 & 66{,}0588 \end{bmatrix}
\tag{1–109}
$$

   Vektor **t** je velikosti 3×1:

$$
\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0{,}0770 \\ -0{,}0308 \\ -0{,}6405 \end{bmatrix}
\tag{1–110}
$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor **x**.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$
\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}8129 & -0{,}0748 & -0{,}0474 \\ -0{,}0748 & 0{,}9701 & -0{,}0190 \\ -0{,}0474 & -0{,}0190 & 0{,}0185 \end{bmatrix}
\tag{1–111}
$$

   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$
\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0300\,\mathrm{m} \\ -0{,}0120\,\mathrm{m} \\ -0{,}00759141 \end{bmatrix}
\tag{1–112}
$$

V enačbi (1–112) je popravek kota δA izračunan v radianih, če ga izračunamo v kotnih enotah dobimo $\delta A = -26'6''$.

Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi (1–104) izračunane iz opazovanj, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili male vrednosti, popravke približnim vrednostim neznank. Končne neznanke dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}9700\,\mathrm{m} \\ 5{,}9880\,\mathrm{m} \\ 1{,}03960614 \end{bmatrix} \tag{1–113}$$

Kot A, podan v kotnih enotah, je enak $A = 59°33'54''$.

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–112), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–107) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–108) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0300\,\mathrm{m} \\ -0{,}0120\,\mathrm{m} \\ 0{,}0432\,\mathrm{m} \\ -0{,}00759141 \end{bmatrix} \tag{1–114}$$

V enačbi (1–114) je popravek kota v_α izračunan v radianih, če ga izračunamo v kotnih enotah dobimo $v_\alpha = -26'6''$. Iz enačb popravkov (enačbe (1–103)) velja, da je $\delta x = v_a$, $\delta y = v_b$ in $\delta A = v_\alpha$.

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–114)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–99)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7{,}9700\,\mathrm{m} \\ 5{,}9880\,\mathrm{m} \\ 7{,}1432\,\mathrm{m} \\ 1{,}03960614 \end{bmatrix} \tag{1–115}$$

Izravnana vrednost opazovanja $\hat{\alpha}$, podana v kotnih enotah, je $\hat{\alpha} = 59°33'54''$. In tudi tu velja $x = \hat{a}$, $y = \hat{b}$ in $A = \hat{\alpha}$.

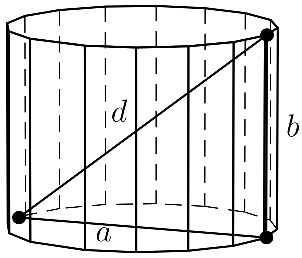
10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Zadovoljimo se z rezultati ene iteracije.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga zahteva, da izračunamo površino S parcele. Za izračun uporabimo ocenjene neznanke iz (1–113) in dobimo:

$$S = x\,y\,\sin A = 41{,}1484\,\mathrm{m}^2 \tag{1–116}$$

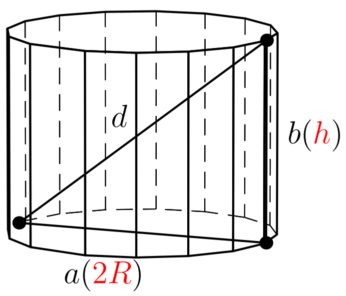
1.11 Primer 6 - Opazovanja v valju

V valju smo izmerili tri količine (glej sliko 1–10): premer osnovne ploskve $a = 10.0$m, višino $b = 20.0$m in prostorsko diagonalo $d = 22.0$m. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in izračunaj, koliko litrov soka (beri piva) bi lahko pretočili v valj.



Slika 1–10: Skica valja in opazovanj

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = 3$, $n_0 = 2$, $r = 1$ in:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}0\,\mathrm{m} \\ 20{,}0\,\mathrm{m} \\ 22{,}0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–117}$$
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, bo matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–118}$$
2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = 2$ neznank. Za neznanki bomo vzeli polmer osnovne ploskve R in višino valja h, kot prikazuje slika 1–11.



Slika 1–11: Izbira neznank pri obravnavanem valju

Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 2×1 in ima obliko:
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ h \end{bmatrix} \tag{1–119}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
Sestavimo $n = 3$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a} - 2R = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{b} - h = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{d} - \sqrt{4R^2 + h^2} = 0 \end{aligned} \tag{1–120}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$. Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta R_0 in h_0. Enačbe popravkov iz (1–120) so nelinearne (tretja enačba), zato bomo nastavili približne vrednosti iz opazovanj, torej $R_0 = a/2$ in $h_0 = b$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} R_0 \\ h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}0\,\mathrm{m} \\ 20{,}0\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–121}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz (1–120) odvajati po obeh neznankah iz (1–119). V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti 3×2 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial R} & \frac{\partial F_1}{\partial h} \\ \frac{\partial F_2}{\partial R} & \frac{\partial F_2}{\partial h} \\ \frac{\partial F_3}{\partial R} & \frac{\partial F_3}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & -1{,}0000 \\ -0{,}8944 & -0{,}8944 \end{bmatrix} \tag{1–122}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz (1–120). Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2R_0 - a \\ h_0 - b \\ \sqrt{4R_0^2 + h_0^2} - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0000\,\mathrm{m} \\ 0{,}0000\,\mathrm{m} \\ 0{,}3607\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–123}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti 2×2:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4{,}8000 & 0{,}8000 \\ 0{,}8000 & 1{,}8000 \end{bmatrix} \tag{1–124}$$

Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti 2×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0{,}3226\,\mathrm{m} \\ -0{,}3226\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–125}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\boldsymbol{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.

Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}2250 & -0{,}1000 \\ -0{,}1000 & 0{,}6000 \end{bmatrix} \tag{1–126}$$

Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta R \\ \delta h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0403\,\mathrm{m} \\ -0{,}1613\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–127}$$

Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi (1–121) izračunane iz opazovanj, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili male vrednosti, popravke približnim vrednostim. Končne neznanke dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} R \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}9597\,\mathrm{m} \\ 19{,}8387\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–128}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–127), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–122) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–123) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0807\,\mathrm{m} \\ -0{,}1613\,\mathrm{m} \\ 0{,}1803\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–129}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–129)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–117)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}9193\,\mathrm{m} \\ 19{,}8387\,\mathrm{m} \\ 22{,}1803\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–130}$$

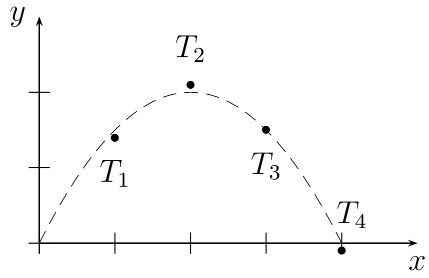
10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
Dodatne iteracije ne bomo izvedli.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
Naloga zahteva, da izračunamo prostornino valja V in le-to predstavimo tudi v litrih soka (piva). Za izračun uporabimo ocenjene neznanke iz (1–128) in dobimo:

$$V = \pi\, R^2\, h = 1\,533{,}0964\,\mathrm{m}^3 = 1\,533\,096{,}3909\,\mathrm{L} \tag{1–131}$$

1.12 Primer 7 - Točke na paraboli

V ravnini smo izmerili koordinate y štirim točkam in dobili: $T_1(1; 1{,}4)$, $T_2(2; 2{,}1)$, $T_3(3; 1{,}5)$ in $T_4(4; -0{,}1)$, koordinate x točk obravnavamo kot konstante. S posredno izravnavo po MNK določite parametre parabole tako, da gre parabola skozi izhodišče koordinatnega sistema in se optimalno prilega točkam.



Slika 1–12: Točke v ravnini, ki ležijo na paraboli

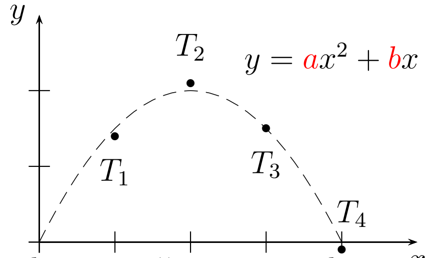
1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Podatki naloge kažejo, da imamo $n = 4$, $n_0 = 2$, $r = 2$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4 \\ 2{,}1 \\ 1{,}5 \\ -0{,}1 \end{bmatrix} \tag{1–132}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–133}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = 2$ neznank. Ker naloga zahteva izračun parabole, ki se optimalno prilega točkam, pri tem, da gre parabola skozi izhodišče, za neznanki izberemo parametra enačbe $y = ax^2 + bx$, torej a in b (glej sliko 1–13).



Slika 1–13: Izbira neznank pri izračunu optimalne parabole, ki gre skozi središče

   Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 2×1 in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{1–134}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 4$ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Enačbe tudi tu zapišemo tako, da vse nastopa na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 - ax_1^2 - bx_1 = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 - ax_2^2 - bx_2 = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 - ax_3^2 - bx_3 = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{y}_4 - ax_4^2 - bx_4 = 0 \end{aligned} \tag{1–135}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
   Nastaviti moramo približne vrednosti neznank, to sta a_0 in b_0. Ker so enačbe popravkov iz (1–135) linearne (ne glede na kvadrate koordinat x), bomo nastavili kar $a_0 = b_0 = 0$. Vektor približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}_0$ je tako enak:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1–136}$$

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz (1–135) odvajati po obeh neznankah iz (1–134). V našem primeru je matrika $\mathbf{B}$ je velikosti 4×2 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2 & -x_1 \\ -x_2^2 & -x_2 \\ -x_3^2 & -x_3 \\ -x_4^2 & -x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}0 & -1{,}0 \\ -4{,}0 & -2{,}0 \\ -9{,}0 & -3{,}0 \\ -16{,}0 & -4{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–137}$$

   Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz (1–135). Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_0x_1^2 + b_0x_1 - y_1 \\ a_0x_2^2 + b_0x_2 - y_2 \\ a_0x_3^2 + b_0x_3 - y_3 \\ a_0x_4^2 + b_0x_4 - y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}4 \\ -2{,}1 \\ -1{,}5 \\ 0{,}1 \end{bmatrix} \tag{1–138}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti 2×2:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 354{,}0 & 100{,}0 \\ 100{,}0 & 30{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–139}$$

   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti 2×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Pf} = \begin{bmatrix} 21{,}70 \\ 9{,}70 \end{bmatrix} \tag{1–140}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0484 & -0{,}1613 \\ -0{,}1613 & 0{,}5710 \end{bmatrix} \tag{1–141}$$

   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5145 \\ 2{,}0384 \end{bmatrix} \tag{1–142}$$

   Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi (1–136) nastavljene na 0, smo v vektorju $\mathbf{\Delta}$ dobili kar končne vrednosti neznank, torej:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5145 \\ 2{,}0384 \end{bmatrix} \tag{1–143}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$. Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe 1–142, matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–137) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–138) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1239 \\ -0{,}0813 \\ -0{,}0155 \\ 0{,}0213 \end{bmatrix} \tag{1–144}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–144)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–132)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5239 \\ 2{,}0187 \\ 1{,}4845 \\ -0{,}0787 \end{bmatrix} \tag{1–145}$$

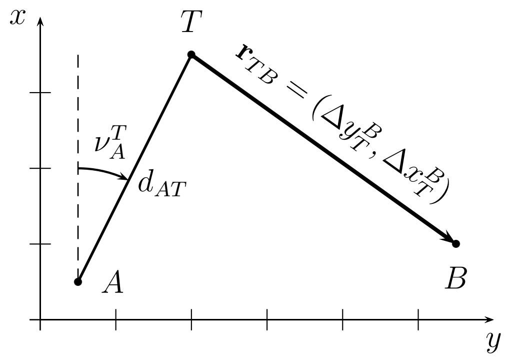
10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Ker so enačbe popravkov iz (1–135) linearne, smo dobili točne rešitve, ni potrebe po ponovni iteraciji.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Zapišimo samo še iskano enačbo optimalne parabole, ki gre skozi središče:

$$y = ax^2 + bx = -0{,}5145 \cdot x^2 + 2{,}0384 \cdot x \tag{1–146}$$

1.13 Primer 8 - Ravninska geodetska mreža

Podane imamo koordinate dveh danih točk, in sicer $A(y_A; x_A) = (10{,}0\,\text{m}; 10{,}0\,\text{m})$ in $B(y_B; x_B) = (100{,}0\,\text{m}; 20{,}0\,\text{m})$. Da bi določili koordinate točke $T(y_T; x_T)$, smo na točki A izmerili smerni kot $\nu_A^T = 30°57'$ in dolžino $d_{AT} = 58{,}3\,\text{m}$, na točki T pa bazni vektor $\mathbf{r}_{TB} = (\Delta y_T^B, \Delta x_T^B) = (60{,}0\,\text{m}, -40{,}0\,\text{m})$ proti točki B. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno izravnavo izravnajte opazovanja in določite koordinate točke $T(y_T; x_T)$.



Slika 1–14: Določitev koordinat točke T na osnovi danih točk A in B ter opazovanj ν_A^T, d_{AT} in $\mathbf{r}_{TB}$

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz podatkov naloge je razvidno, da imamo $n = 4$, $n_0 = 2$, $r = 2$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} d_{AT} \\ \nu_A^T \\ \Delta y_T^B \\ \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58{,}3\,\text{m} \\ 0{,}540179 \\ 60{,}0\,\text{m} \\ -40{,}0\,\text{m} \end{bmatrix} \tag{1–147}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži $\mathbf{P}$ enaka:

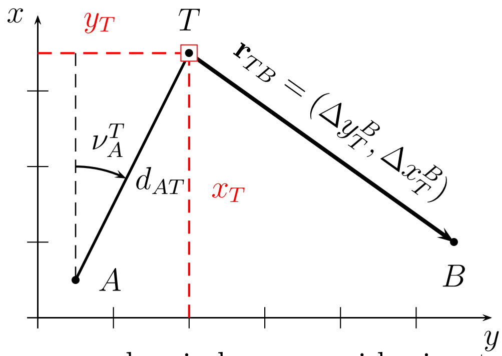
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–148}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = 2$ neznank. Ker naloga zahteva izračun koordinat točke T, bomo za neznanki vzeli kar koordinati y_T in x_T, kot to prikazuje slika 1–15.

   Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 2×1 in ima obliko:

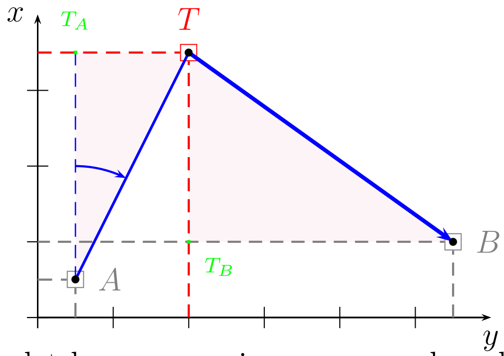
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_T \\ x_T \end{bmatrix} \tag{1–149}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Pri nalogi obravnavamo horizontalno geodetsko mrežo, kjer imamo tri vrste opazovanj, to so: dolžina d_{AT}, smerni kot ν_A^T in komponenti baznega vektorja GNSS, Δy_T^B in Δx_T^B. Slika 1–16 prikazuje, kako geodetska opazovanja v geodetski mreži povežemo z neznankami, to so koordinate točke T. Na sliki so v sivi barvi izrisane dane količine (točki A in B, podane so



Slika 1–15: Izbira neznank pri obravnavani horizontalni geodetski mreži

koordinate teh dveh točk), v modri barvi so izrisana opazovanja, v rdeči barvi neznanki in v zeleni barvi ter pomanjšano dve pomožni točki, za sestavo trikotnikov, ki sta prikazana v bledi rdeči barvi. Zaradi jasnejšega prikaza obeh trikotnikov, oznake opazovanj in koordinatnih razlik niso prikazane.



Slika 1–16: Prikaz, kako so geodetska opazovanja povezana s koordinatami točk (neznankami) oz. s koordinatnimi razlikami med točkami

S slike 1–16 vidimo, da sta opazovana dolžina d_{AT} in smerni kot ν_A^T dve količini v pravokotnem trikotniku AT_AT, in sicer hipotenuza (d_{AT}) in kot (ν_A^T) pri točki A. Kateti tega pravokotnega trikotnika pa sta koordinatni razliki $\overline{T_AT} = y_T - y_A$ in $\overline{AT_A} = x_T - x_A$. Dolžino d_{AT} in smerni kot ν_A^T lahko s koordinatami obeh točk (A in T) oz. s katetami zato izrazimo kot:

$$\begin{aligned} d_{AT} &= \sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} \\ \nu_A^T &= \arctan\left(\frac{y_T - y_A}{x_T - x_A}\right) \end{aligned} \tag{1–150}$$

Po drugi strani pa na sliki 1–16 vidimo, da z opazovanim baznim vektorjem GNSS ($\mathbf{r}_{TB}$) lahko sestavimo pravokotni trikotnik BT_BT. Komponenti baznega vektorja Δy_T^B in Δx_T^B sta neposredno opazovani kateti tega trikotnika, kjer pa je potrebno paziti na predznak obeh opazovanj. Oznaka baznega vektorja $\mathbf{r}_{TB}$ in smer (puščica) na sliki 1–16 nakazuje, da "gremo" s točke T na točko B, torej:

$$\mathbf{r}_{TB} = \begin{bmatrix} \Delta y_T^B \\ \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_B - y_T \\ x_B - x_T \end{bmatrix} \tag{1–151}$$

*Pri obravnavi geodetskih opazovanj v geodetski mreži pri posredni izravnavi po MNK je ključnega pomena poznavanje prehoda med **geodetskim kartezičnim koordinatnim sistemom** in **geodetskim polarnim koordinatnim sistemom**. Večino geodetskih opazovanj lahko parametriziramo z neznankami na osnovi enačb prehoda med obema geodetskima sistemoma.*

Pri nalogi moramo sedaj sestaviti $n = 4$ enačb popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Uporabimo seveda enačbi (1–150) in (1–151) in jih zapišemo tako, da vsi elementi enačb nastopajo na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{d}_{AT} - \sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{\nu}_A^T - \arctan\left(\frac{y_T - y_A}{x_T - x_A}\right) = 0 \\
F_3 &\equiv \Delta\hat{y}_T^B - y_B + y_T = 0 \\
F_4 &\equiv \Delta\hat{x}_T^B - x_B + x_T = 0
\end{aligned} \tag{1–152}$$

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
   Približne vrednosti neznank moramo nastaviti, ker imamo nelinearne enačbe popravkov. Uporabili bomo najenostavnejši način, in sicer dane koordinate točke B in komponenti baznega vektorja Δy_T^B in Δx_T^B. Približni vrednosti koordinat $y_{T,0}$ in $x_{T,0}$ dobimo na osnovi enačbe (1–151):
$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_{T,0} \\ x_{T,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_B - \Delta y_T^B \\ x_B - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40{,}00\,\mathrm{m} \\ 60{,}00\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–153}$$

5. Linearizamo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz (1–152) odvajati po obeh neznankah iz (1–149), velikost matrike $\mathbf{B}$ pa je 4×2. Parcialna odvoda enačbe popravkov F_1 po neznankah y_T in x_T sta:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y_T} &= -\frac{y_T - y_A}{\sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2}} = -\frac{y_T - y_A}{d_{AT}} = -\sin \nu_A^T \\
\frac{\partial F_1}{\partial x_T} &= -\frac{x_T - x_A}{\sqrt{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2}} = -\frac{x_T - x_A}{d_{AT}} = -\cos \nu_A^T
\end{aligned} \tag{1–154}$$

   V enačbi (1–154) je prikazano, da se parcialna odvoda enačbe popravkov za dolžino med dvema točkama lahko predstavita kot negativni vrednosti sinusa oz. kosinusa smernega kota med točkama. Geometrični prikaz je dokaj jasen iz slike (1–16), če obravnavamo pravokotni trikotnik AT_AT. Kaj je tudi posledica tega dejstva? Oba parcialna odvoda iz (1–154) sta brez enot, zato velikost geodetske mreže pri posredni izravnavi, ko merimo dolžine med točkami, nima vpliva na rezultate. Vpliva ima samo oblika geodetske mreže (kako so točke razporejene po ravnini).

   Parcialna odvoda enačbe popravkov F_2 po obeh neznankah, pa sta:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial y_T} &= -\frac{x_T - x_A}{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} = -\frac{x_T - x_A}{d_{AT}^2} = -\frac{\cos \nu_A^T}{d_{AT}} \\
\frac{\partial F_2}{\partial x_T} &= \frac{y_T - y_A}{(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2} = \frac{y_T - y_A}{d_{AT}^2} = \frac{\sin \nu_A^T}{d_{AT}}
\end{aligned} \tag{1–155}$$

   V primeru smernih kotov med točkami, pa so parcialni odvodi iz enačbe (1–155) obratno sorazmerni z dolžino med točkami in premo sorazmerni s sinusom oz. kosinusom smernega kota. To pomeni, da v primeru merjenih smernih kotov (kar v praksi pomeni v primeru merjenih smeri in kotov) na rezultate vpliva tako velikost geodetske mreže (razdalje med točkami) kot tudi geometrija mreže (razporeditev točk v ravnini).

Pri zadnjih dveh enačbah, pri opazovanih baznih vektorjih, pa vidimo, da so parcialni odvodi enostavni. Velja:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y_T} = 1 \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x_T} = 0 \qquad \frac{\partial F_4}{\partial y_T} = 0 \qquad \frac{\partial F_4}{\partial x_T} = 1 \tag{1–156}$$

Iz enačbe (1–156) je razvidno, da so parcialni odvodi baznih vektorjev po neznankah (koordinatah) lahko le 1 ali -1, v odvisnosti od usmerjenosti baznega vektorja. To pomeni, da v primeru geodetske mreže GNSS, na rezultate ne vplivata ne velikost kakor tudi ne geometrija geodetske mreže, ampak samo še to, kako so točke med seboj povezane z baznimi vektorji.

Matriko parcialnih odvodov $\mathbf{B}$ nastavimo tako, da izračunamo parcialne odvode vseh štirih enačb popravkov, uporabimo torej enačbe (1–154), (1–155) in (1–156). V dobljene izraze vstavimo približne vrednosti koordinat nove točke T, torej $y_{T,0}$ in $x_{T,0}$ iz enačbe (1–153) in izračunamo. Matrika $\mathbf{B}$ je enaka:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_T} & \frac{\partial F_1}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_T} & \frac{\partial F_2}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_T} & \frac{\partial F_3}{\partial x_T} \\ \frac{\partial F_4}{\partial y_T} & \frac{\partial F_4}{\partial x_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5145 & -0{,}8575 \\ -0{,}0147 & 0{,}0088 \\ 1{,}0000 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 1{,}0000 \end{bmatrix} \tag{1–157}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz (1–152). Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sqrt{(y_{T,0} - y_A)^2 + (x_{T,0} - x_A)^2} - d_{AT} \\ \arctan\left(\frac{y_{T,0} - y_A}{x_{T,0} - x_A}\right) - \nu_A^T \\ y_B - y_{T,0} - \Delta y_T^B \\ x_B - x_{T,0} - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{AT,0} - d_{AT} \\ \nu_A^{T,0} - \nu_A^T \\ \Delta y_{T,0}^B - \Delta y_T^B \\ \Delta x_{T,0}^B - \Delta x_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0095 \\ 0{,}0002401 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix} \tag{1–158}$$

V enačbi (1–158) je prikazano, kako izračunamo odstopanja enačb popravkov iz enačbe (1–152), kjer $d_{AT,0}$ predstavlja vrednost izračunane dolžine med točkama A in T, če uporabimo približne vrednosti koordinat točke T, to sta $y_{T,0}$ in $x_{T,0}$. Na isti način dobimo $\nu_A^{T,0}$, smerni kot s točke A na točko T, $\Delta y_{T,0}^B$, koordinatno razliko po komponenti y s točke T na točko B, in $\Delta x_{T,0}^B$, koordinatno razliko po komponenti x s točke T na točko B, vsi pa so izračunani iz približnih koordinat točke T.

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Ko imamo izračunani matriki $\mathbf{P}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$, lahko izračunamo sistem normalnih enačb. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti 2×2:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1{,}2649 & 0{,}4410 \\ 0{,}4410 & 1{,}7354 \end{bmatrix} \tag{1–159}$$

Izračunamo še vektor $\mathbf{t}$, ki je velikosti 2×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0{,}0049 \\ -0{,}0082 \end{bmatrix} \tag{1–160}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:
   $$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}8674 & -0{,}2205 \\ -0{,}2205 & 0{,}6323 \end{bmatrix} \tag{1–161}$$
   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:
   $$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta y_T \\ \delta x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0025\,\mathrm{m} \\ -0{,}0041\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–162}$$
   Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi (1–153) izračunane iz opazovanj, končne neznanke dobimo kot:
   $$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} y_{T,0} + \delta y_T \\ x_{T,0} + \delta x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39{,}9975\,\mathrm{m} \\ 59{,}9959\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–163}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–162), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–157) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–158) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:
   $$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} = \begin{bmatrix} v_{d_{AT}} \\ v_{\nu_A^T} \\ v_{\Delta y_T^B} \\ v_{\Delta x_T^B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0048\,\mathrm{m} \\ 0{,}0002400 \\ 0{,}0025\,\mathrm{m} \\ 0{,}0041\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–164}$$
   V enačbi (1–164) je popravek $v_{\nu_A^T}$ izračunan v radianih, lahko ga zapišemo v obliki $v_{\nu_A^T} = 50''$.

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–164)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–147)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:
   $$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{d}_{AT} \\ \hat{\nu}_A^T \\ \Delta\hat{y}_T^B \\ \Delta\hat{x}_T^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58{,}3048\,\mathrm{m} \\ 0{,}5404194 \\ 60{,}0025\,\mathrm{m} \\ -39{,}9959\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–165}$$
   Tudi v enačbi (1–165) je izravnana vrednost kota $\hat{\nu}_A^T$ podana v radianih, lahko pa jo zapišemo kot: $\hat{\alpha} = 30°57'50''$.

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Dodatne iteracije ne bomo delali.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Naloga ne zahteva dodatnih izračunov.

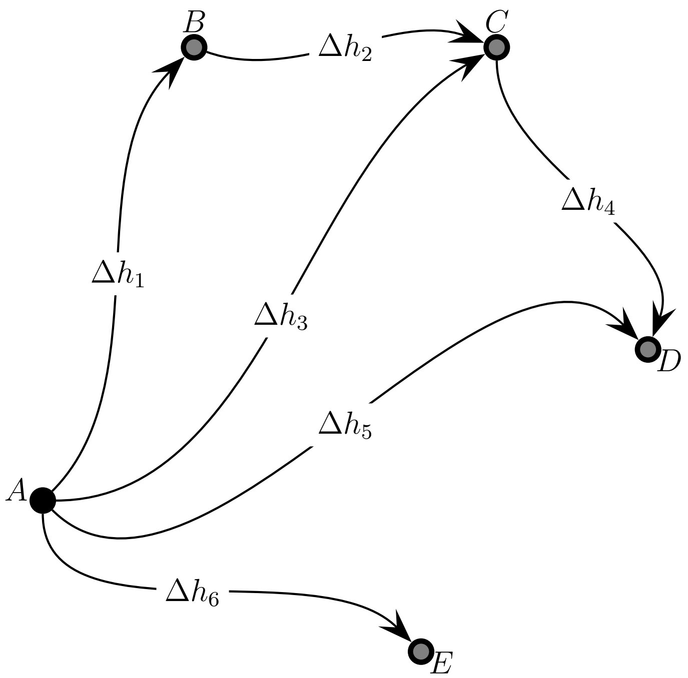
1.14 Primer 9 - Višinska geodetska mreža

V nivelmanski mreži, kjer je višina točke A dana ($H_A = 320{,}00\,\mathrm{m}$), smo opazovali višinske razlike in dolžine nivelmanskih linij, kakor jih prikazuje slika 1–17. Numerične vrednosti opazovanj so podane v preglednici 1–1.

Preglednica 1–1: Izmerjene vrednosti višinskih razlik med reperji

VIŠINSKA RAZLIKA	**DOLŽINA LINIJE**
$\Delta h_1 = 0{,}25\,\mathrm{m}$	$\overline{AB} = 10\,\mathrm{m}$
$\Delta h_2 = 0{,}30\,\mathrm{m}$	$\overline{BC} = 20\,\mathrm{m}$
$\Delta h_3 = 0{,}60\,\mathrm{m}$	$\overline{AC} = 40\,\mathrm{m}$
$\Delta h_4 = -0{,}15\,\mathrm{m}$	$\overline{CD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_5 = 0{,}40\,\mathrm{m}$	$\overline{AD} = 15\,\mathrm{m}$
$\Delta h_6 = -0{,}15\,\mathrm{m}$	$\overline{AE} = 10\,\mathrm{m}$

S posredno izravnavo po MNK izravnajte opazovanja in določite izravnane vrednosti višin reperjev B, C, D in E.



Slika 1–17: Opazovane višinske razlike v višinski geodetski mreži

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.

Imamo $n = 6$, $n_0 = 4$, $r = 2$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}25\,\mathrm{m} \\ 0{,}30\,\mathrm{m} \\ 0{,}60\,\mathrm{m} \\ -0{,}15\,\mathrm{m} \\ 0{,}40\,\mathrm{m} \\ -0{,}15\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–166}$$

Uteži nastavimo tako, da bodo cela števila in najmanjša možna:

$$p_1 = 12{,}0 \quad p_2 = 6{,}0 \quad p_3 = 3{,}0 \quad p_4 = 8{,}0 \quad p_5 = 8{,}0 \quad p_6 = 12{,}0 \tag{1–167}$$

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 = 4$. Izbrali bomo kar višine novih točk, saj po tem sprašuje naloga, torej H_B, H_C, H_D in H_E. Vektor neznank ima tako obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} \tag{1–168}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
Sestavimo $n = 6$ enačb popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Enačbe nastavimo tako, da je celotna enačba na levi strani enačaja. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \Delta\hat{h}_1 - H_B + H_A = 0 \\ F_2 &\equiv \Delta\hat{h}_2 - H_C + H_B = 0 \\ F_3 &\equiv \Delta\hat{h}_3 - H_C + H_A = 0 \\ F_4 &\equiv \Delta\hat{h}_4 - H_D + H_C = 0 \\ F_5 &\equiv \Delta\hat{h}_5 - H_D + H_A = 0 \\ F_6 &\equiv \Delta\hat{h}_6 - H_E + H_A = 0 \end{aligned} \tag{1–169}$$

4. Nastavimo približne vrednosti neznank, izračunamo vektor $\mathbf{x}_0$.
Ker so enačbe popravkov iz (1–169) linearne, približne vrednosti neznank ne vplivajo na končne rezultate. Zaradi tega lahko vse približne vrednosti vseh neznank nastavimo na nič (poskusite doma rešiti neznanke na ta način). V našem primeru bomo približne vrednosti neznank $H_{B,0}$, $H_{C,0}$, $H_{D,0}$ in $H_{E,0}$ izračunali iz opazovanj, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_{B,0} \\ H_{C,0} \\ H_{D,0} \\ H_{E,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_A + \Delta h_1 \\ H_A + \Delta h_3 \\ H_A + \Delta h_5 \\ H_A + \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320{,}25\,\mathrm{m} \\ 320{,}60\,\mathrm{m} \\ 320{,}40\,\mathrm{m} \\ 319{,}85\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–170}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$.
Nastavimo oba vektorja, ki bosta rezultat izravnave, to sta vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ in

vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\boldsymbol{\Delta}$, in sicer:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta H_B \\ \delta H_C \\ \delta H_D \\ \delta H_E \end{bmatrix} \tag{1–171}$$

Vektor $\boldsymbol{\Delta}$ bo, ker smo približne vrednosti nastavili iz opazovanj, dejansko vseboval le popravke približnih vrednosti neznank. Nastavimo tudi matriko $\mathbf{B}$, ki vsebuje parcialne odvode vseh enačb popravkov po vseh neznankah:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial H_B} & \frac{\partial F_1}{\partial H_C} & \frac{\partial F_1}{\partial H_D} & \frac{\partial F_1}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_2}{\partial H_B} & \frac{\partial F_2}{\partial H_C} & \frac{\partial F_2}{\partial H_D} & \frac{\partial F_2}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_3}{\partial H_B} & \frac{\partial F_3}{\partial H_C} & \frac{\partial F_3}{\partial H_D} & \frac{\partial F_3}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_4}{\partial H_B} & \frac{\partial F_4}{\partial H_C} & \frac{\partial F_4}{\partial H_D} & \frac{\partial F_4}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_5}{\partial H_B} & \frac{\partial F_5}{\partial H_C} & \frac{\partial F_5}{\partial H_D} & \frac{\partial F_5}{\partial H_E} \\ \frac{\partial F_6}{\partial H_B} & \frac{\partial F_6}{\partial H_C} & \frac{\partial F_6}{\partial H_D} & \frac{\partial F_6}{\partial H_E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1–172}$$

Sestavimo tudi vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ in sicer: vse, kar se najaha na levi strani enačb popravkov v (1–169) prenesemo na desno stran. Ker še ne poznamo izravnanih vrednosti opazovanj uporabimo merjene vrednosti opazovanj in ker še ne poznamo vrednosti neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Ker smo leve strani prenesli na desno stran, se spremeni tudi predznak. Dobimo

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} H_{B,0} - H_A - \Delta h_1 \\ H_{C,0} - H_{B,0} - \Delta h_2 \\ H_{C,0} - H_A - \Delta h_3 \\ H_{D,0} - H_{C,0} - \Delta h_4 \\ H_{D,0} - H_A - \Delta h_5 \\ H_{E,0} - H_A - \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}05\,\mathrm{m} \\ 0{,}00\,\mathrm{m} \\ -0{,}05\,\mathrm{m} \\ 0{,}00\,\mathrm{m} \\ 0{,}00\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–173}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Sistem normalnih enačb dobimo z dvema matričnima izračunoma. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti 4×4:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 18{,}0 & -6{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ -6{,}0 & 17{,}0 & -8{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & -8{,}0 & 16{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & 12{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–174}$$

   Vektor $\mathbf{t}$ je velikosti 4×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0{,}30\,\mathrm{m} \\ -0{,}70\,\mathrm{m} \\ 0{,}40\,\mathrm{m} \\ 0{,}00\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–175}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Rešitev dobimo na osnovi rešitve sistema $\mathbf{N\Delta} = \mathbf{t}$, torej prvo potrebujemo inverz $\mathbf{N}^{-1}$, ki je:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}06566 & 0{,}03030 & 0{,}01515 & 0{,}00000 \\ 0{,}03030 & 0{,}09091 & 0{,}04545 & 0{,}00000 \\ 0{,}01515 & 0{,}04545 & 0{,}08523 & 0{,}00000 \\ 0{,}00000 & 0{,}00000 & 0{,}00000 & 0{,}08333 \end{bmatrix} \tag{1–176}$$

   Vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0{,}0045\,\mathrm{m} \\ -0{,}0364\,\mathrm{m} \\ 0{,}0068\,\mathrm{m} \\ 0{,}0000\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–177}$$

   Končne vrednosti neznank dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} H_B \\ H_C \\ H_D \\ H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 320{,}2545\,\mathrm{m} \\ 320{,}5636\,\mathrm{m} \\ 320{,}4068\,\mathrm{m} \\ 319{,}8500\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–178}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Vektor popravkov opazovanj izračunamo iz osnovnega matričnega modela izravnave, in sicer:

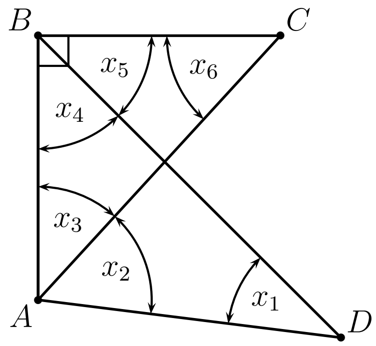
$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} = \begin{bmatrix} 4{,}5\,\mathrm{mm} \\ 9{,}1\,\mathrm{mm} \\ -36{,}4\,\mathrm{mm} \\ -6{,}8\,\mathrm{mm} \\ 6{,}8\,\mathrm{mm} \\ 0{,}0\,\mathrm{mm} \end{bmatrix} \tag{1–179}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor dobimo kot:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}2545\,\mathrm{m} \\ 0{,}3091\,\mathrm{m} \\ 0{,}5636\,\mathrm{m} \\ -0{,}1568\,\mathrm{m} \\ 0{,}4068\,\mathrm{m} \\ -0{,}1500\,\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1–180}$$

1.15 Primer 10 - Sistem kotov v triangulacijski shemi

V triangulacijski shemi smo izmerili kote, kot to prikazuje slika 1–18, in dobili: $x_1 = 48{,}88°$, $x_2 = 42{,}10°$, $x_3 = 44{,}52°$, $x_4 = 43{,}80°$, $x_5 = 46{,}00°$ in $x_6 = 44{,}70°$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in upoštevaj, da je na točki B pravi kot.

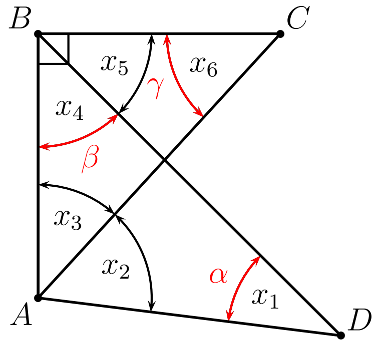


Slika 1–18: Koti v triangulacijski shemi med točkami A, B, C in D

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz podatkov naloge je razvidno, da imamo $n = 6$ opazovanj, to so koti v triangulacijski shemi med štirimi točkami A, B, C in D, kot to prikazuje slika 1–18. Vektor opazovanj zato sestavimo kot:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48{,}88° \\ 42{,}10° \\ 44{,}52° \\ 43{,}80° \\ 46{,}00° \\ 44{,}70° \end{bmatrix} \tag{1–181}$$
   Ker so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, so vse uteži opazovanj enake in so:
$$p_i = 1 \qquad i = \{1, \ldots, 6\} \tag{1–182}$$
   Zanima pa nas tu tudi, koliko ne n_0. Če pogledamo sliko 1–18, vidimo da imamo dva trikotnika, in sicer:
   - trikotnik ΔABC, ki je pravokotni trikotnik, zato v njem potrebujemo le en kot (x_3 ali x_6) in
   - trikotnik ΔABD, ki je splošni trikotnik, zato v njem potrebujemo dva kota (dva izmed kotov x_1, $x_2 + x_3$ in x_4).

   Skupno torej velja, da je $n_0 = 3$ in zato $r = 3$.

2. Uvedemo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model in sestavimo vektor neznank $\mathbf{x}$.
   Izbrati moramo $u = n_0 = 3$ neznank. Izbrali si bomo $u = n_0 = 3$ kote, in sicer iz trikotnika ΔABC bomo določili neznanko γ za kot x_6, medtem ko bomo pri trikotniku ΔABD določili α za kot x_1 in β za kot x_4. Izbiro prikazuje slika 1–19.



Slika 1–19: Izbira neznank pri obravnavani shemi kotov

Vektor neznank $\mathbf{x}$ je velikosti 3×1 in ima obliko:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{1–183}$$

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n = 6$ enačb popravkov. V vsaki enačbi popravkov eno opazovanje povežemo z neznankami,n sledimo pravilu sestavljanja enačb popravkov in na koncu dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{x}_1 - \alpha = 0 \\ F_2 &\equiv \hat{x}_2 + \alpha + \beta - \gamma - 90° = 0 \\ F_3 &\equiv \hat{x}_3 + \gamma - 90° = 0 \\ F_4 &\equiv \hat{x}_4 - \beta = 0 \\ F_5 &\equiv \hat{x}_5 + \beta - 90° = 0 \\ F_6 &\equiv \hat{x}_6 - \gamma = 0 \end{aligned} \tag{1–184}$$

   Enačbe popravkov iz (1–184) so zapisane tako, da vse nastopa na levi strani enačaja, na prvem mestu je izravnano opazovanje in samo eno opazovanje nastopa v posamezni enačbi poprevkov.

4. Izračunamo/nastavimo približne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}_0$.
   Približne vrednosti neznank pridobimo kar iz opazovanj, saj vidimo, da velja:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48{,}88° \\ 43{,}80° \\ 44{,}70° \end{bmatrix} \tag{1–185}$$

5. Lineariziramo enačbe popravkov in jih zapišemo v matrični obliki $\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{f}$. Nastaviti moramo matriko koeficientov (parcialnih odvodov) $\mathbf{B}$ in vektor odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$. Za matriko $\mathbf{B}$ moramo vse enačbe popravkov iz (1–184) odvajati po vseh neznankah iz (1–183), velikost matrike $\mathbf{B}$ pa je 6×3. Ker so enačbe popravkov linearne in enostavne, je matrika $\mathbf{B}$

enaka;

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial \beta} & \frac{\partial F_4}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_5}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_5}{\partial \beta} & \frac{\partial F_5}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_6}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_6}{\partial \beta} & \frac{\partial F_6}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1–186}$$

Za določitev vektorja odstopanj $\mathbf{f}$ izhajamo iz enačb popravkov iz (1–184). Vse kar se nahaja na levi strani enačaja prenesemo na desno stran. S tem spremenimo predznak. Namesto izravnanih opazovanj uporabimo merjene vrednosti, namesto neznank uporabimo približne vrednosti neznank. Kar ostane, so odstopanja enačb popravkov. Dobimo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - x_1 \\ 90^\circ - \alpha_0 - \beta_0 + \gamma_0 - x_2 \\ 90^\circ - \gamma_0 - x_3 \\ \beta_0 - x_4 \\ 90^\circ - \beta_0 - x_5 \\ \gamma_0 - x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00^\circ \\ -0{,}08^\circ \\ 0{,}78^\circ \\ 0{,}00^\circ \\ 0{,}20^\circ \\ 0{,}00^\circ \end{bmatrix} \tag{1–187}$$

6. Izračunamo sistem normalnih enačb, matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$.
   Ko imamo izračunani matriki $\mathbf{P}$ in $\mathbf{B}$ ter vektor $\mathbf{f}$, lahko izračunamo sistem normalnih enačb. Prvo izračunamo matriko $\mathbf{N}$, ki je velikosti 3×3:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2{,}0 & 1{,}0 & -1{,}0 \\ 1{,}0 & 3{,}0 & -1{,}0 \\ -1{,}0 & -1{,}0 & 3{,}0 \end{bmatrix} \tag{1–188}$$

   Izračunamo še vektor $\mathbf{t}$, ki je velikosti 3×1:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -0{,}080 \\ 0{,}120 \\ 0{,}860 \end{bmatrix} \tag{1–189}$$

7. Izračunamo popravke približnih vrednosti neznank, vektor $\mathbf{\Delta}$, in končne vrednosti neznank, vektor $\mathbf{x}$.
   Za rešitev sistema normalnih enačb je prvo potrebno izračunati inverz matrike sistema normalnih enačb, in sicer:

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}6667 & -0{,}1667 & 0{,}1667 \\ -0{,}1667 & 0{,}4167 & 0{,}0833 \\ 0{,}1667 & 0{,}0833 & 0{,}4167 \end{bmatrix} \tag{1–190}$$

   Rešitev vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ dobimo kot:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \delta\alpha \\ \delta\beta \\ \delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}070^\circ \\ 0{,}135^\circ \\ 0{,}355^\circ \end{bmatrix} \tag{1–191}$$

Ker so bile približne vrednosti neznank v enačbi (1–185) izračunane iz opazovanj, končne neznanke dobimo kot:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \delta\alpha \\ \beta_0 + \delta\beta \\ \gamma_0 + \delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48{,}950° \\ 43{,}935° \\ 45{,}055° \end{bmatrix} \tag{1–192}$$

8. Izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$.
   Na osnovi vektorja popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ iz enačbe (1–191), matrike koeficientov $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–186) in vektorja odstopanj enačb popravkov $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–187) izračunamo vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ kot:

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B\Delta} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{x_2} \\ v_{x_3} \\ v_{x_4} \\ v_{x_5} \\ v_{x_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}070° \\ 0{,}070° \\ 0{,}425° \\ 0{,}135° \\ 0{,}065° \\ 0{,}355° \end{bmatrix} \tag{1–193}$$

9. Izračunamo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
   Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ (enačba (1–193)) prištejemo vektorju opazovanj $\mathbf{l}$ (enačba (1–181)) in dobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{x}_5 \\ \hat{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48{,}950° \\ 42{,}170° \\ 44{,}945° \\ 43{,}935° \\ 46{,}065° \\ 45{,}055° \end{bmatrix} \tag{1–194}$$

10. Preverimo, ali je potrebno narediti dodatno iteracijo posredne izravnave.
    Ker so enačbe popravkov linearne, ni potrebe po dodatnih iteracijah.

11. Če naloga zahteva še kakšne dodatne izračune (kar z izravnanimi neznankami ali opazovanji ne pridobimo), uporabimo izračunane neznanke ali izravnana opazovanja in rešimo problem.
    Naloga ne zahteva nobenega dodatnega izračuna.

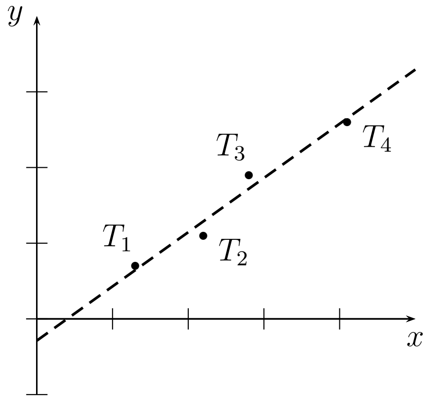
1.16 Primer 11 - Premica v ravnini, opazovane koordinate x in y

V ravnini imamo štiri točke, za katere imamo opazovane tako koordinate x, kot tudi koordinate y, vrednosti opazovanj pa so predstavljene v preglednici 1–2.

Preglednica 1–2: Opazovane koordinate x in y štirih točk

Točka	x	y
T_1	1,3	0,7
T_2	2,2	1,1
T_3	2,8	1,9
T_4	4,1	2,6

Točke v ravnini prikazuje slika 1–20. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj neodvisna, s posredno izravnavo po MNK izravnaj opazovanja in določi premico, ki se optimalno prilega točkam.



Slika 1–20: Točke v ravnini

Iz podatkov je razvidno, da imamo $k = 4$ točke, ker pa imamo opazovane tako koordinate x kot tudi koordinate y, velja da je število opazovanj enako $n = 8$. Za določitev minimalnega števila opazovanj za enolično rešitev problema, pa bomo prvo nastavili število neznank u, saj za posredno izravnavo po MNK velja $u = n_0$. Izhajali bomo iz pravil za sestavo enačb popravkov (glej poglavje 1.2), saj morajo le-te biti oblike:

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{x}_1 - f_{x_1}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{y}_1 - f_{y_1}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_3 &\equiv \hat{x}_2 - f_{x_2}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_4 &\equiv \hat{y}_2 - f_{y_2}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_5 &\equiv \hat{x}_3 - f_{x_3}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_6 &\equiv \hat{y}_3 - f_{y_3}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_7 &\equiv \hat{x}_4 - f_{x_4}(\mathbf{x}) = 0 \\
F_8 &\equiv \hat{y}_4 - f_{y_4}(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned}
\tag{1–195}
$$

V enačbah (1–195) vektor $\mathbf{x}$ predstavlja vektor neznank. Enačbe popravkov sestavimo tako, da prvo zapišemo niz vseh izravnanih opazovanj na začetku enačbe. Potem pa vsa izravnana opazovanja predstavimo z neznankami. Ker želimo določiti premico, ki se optimalno prilega točkam, bomo za dve neznanki izbrali parametra premice a in b. Enačbo premice, $y = a\,x + b$, bomo uporabili za opazovane koordinate y, a ker v vsaki enačbi popravkov lahko nastopa le eno opazovanje, tu ne smemo uporabiti koordinate x. Zato za vsako opazovano koordinato x nastavimo novo neznanko, kar pomeni, da moramo dodatno uvesti še štiri ($= k$) neznanke, ki jih označimo s p_1, p_2, p_3 in p_4. Vidimo, da je število neznank u, ki jih moramo uvesti v funkcionalni model enako:

$$u = \underbrace{2}_{a,b} + \underbrace{4}_{p_1,p_2,p_3,p_4} = 2 + k = 6 = n_0 \tag{1–196}$$

S tem, ko smo nastavili neznanke in njihovo število, smo seveda nastavili tudi minimalno število opazovanj za rešitev problema n_0. Ko imamo uvedene neznanke, jih damo v vektor neznank, in sicer:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1–197}$$

Sedaj sestavimo končne enačbe popravkov kot:

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv \hat{x}_1 - p_1 = 0 \\
F_2 &\equiv \hat{y}_1 - a\,p_1 - b = 0 \\
F_3 &\equiv \hat{x}_2 - p_2 = 0 \\
F_4 &\equiv \hat{y}_2 - a\,p_2 - b = 0 \\
F_5 &\equiv \hat{x}_3 - p_3 = 0 \\
F_6 &\equiv \hat{y}_3 - a\,p_3 - b = 0 \\
F_7 &\equiv \hat{x}_4 - p_4 = 0 \\
F_8 &\equiv \hat{y}_4 - a\,p_4 - b = 0
\end{aligned} \tag{1–198}$$

Vidimo, da so enačbe popravkov iz (1–198) sestavljene po pravilih iz poglavja 1.2, v vsaki enačbi nastopa le eno (izravnano) opazovanje, ki se nato zapiše v odvisnosti od (le) neznank. Enačbe popravkov so nelinearne, zato je potrebno izračunati približne vrednosti neznank. Uporabimo opazovanja, kjer dobimo:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ p_{1,0} \\ p_{2,0} \\ p_{3,0} \\ p_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ y_1 - a_0\,x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 1{,}3 \\ 2{,}2 \\ 2{,}8 \\ 4{,}1 \end{bmatrix} \tag{1–199}$$

Sestavimo osnovni matrični model posredne izravnave, $\mathbf{v} + \mathbf{B\Delta} = \mathbf{f}$. Vektor popravkov opazovanj $\mathbf{v}$ se nanaša na vektor opazovanj, oziroma vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ iz enačb popravkov v (1–198), medtem ko se vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{\Delta}$ nanaša na neznanke iz enačbe (1–197), oziroma na približne vrednosti neznank iz enačbe (1–199). Prvo sestavimo matriko koeficientov $\mathbf{B}$, ki je velikosti 8×6 in ima obliko:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \frac{\partial F_1}{\partial p_3} & \frac{\partial F_1}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} & \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \frac{\partial F_2}{\partial p_3} & \frac{\partial F_2}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial a} & \frac{\partial F_3}{\partial b} & \frac{\partial F_3}{\partial p_1} & \frac{\partial F_3}{\partial p_2} & \frac{\partial F_3}{\partial p_3} & \frac{\partial F_3}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial a} & \frac{\partial F_4}{\partial b} & \frac{\partial F_4}{\partial p_1} & \frac{\partial F_4}{\partial p_2} & \frac{\partial F_4}{\partial p_3} & \frac{\partial F_4}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_5}{\partial a} & \frac{\partial F_5}{\partial b} & \frac{\partial F_5}{\partial p_1} & \frac{\partial F_5}{\partial p_2} & \frac{\partial F_5}{\partial p_3} & \frac{\partial F_5}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_6}{\partial a} & \frac{\partial F_6}{\partial b} & \frac{\partial F_6}{\partial p_1} & \frac{\partial F_6}{\partial p_2} & \frac{\partial F_6}{\partial p_3} & \frac{\partial F_6}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_7}{\partial a} & \frac{\partial F_7}{\partial b} & \frac{\partial F_7}{\partial p_1} & \frac{\partial F_7}{\partial p_2} & \frac{\partial F_7}{\partial p_3} & \frac{\partial F_7}{\partial p_4} \\ \frac{\partial F_8}{\partial a} & \frac{\partial F_8}{\partial b} & \frac{\partial F_8}{\partial p_1} & \frac{\partial F_8}{\partial p_2} & \frac{\partial F_8}{\partial p_3} & \frac{\partial F_8}{\partial p_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,0} & -1 & -a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -p_{2,0} & -1 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -p_{3,0} & -1 & 0 & 0 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -p_{4,0} & -1 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \end{bmatrix} \tag{1–200}$$

Nato sestavimo še vektor odstopanj $\mathbf{f}$ enačb popravkov, ki ima obliko:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} p_{1,0} - x_1 \\ a_0\, p_{1,0} + b_0 - y_1 \\ p_{2,0} - x_2 \\ a_0\, p_{2,0} + b_0 - y_2 \\ p_{3,0} - x_3 \\ a_0\, p_{3,0} + b_0 - y_3 \\ p_{4,0} - x_4 \\ a_0\, p_{4,0} + b_0 - y_4 \end{bmatrix} \tag{1–201}$$

Na osnovi matrike $\mathbf{B}$ iz enačbe (1–200) in vektorja $\mathbf{f}$ iz enačbe (1–201) sestavimo sistem normalnih enačb tako, da izračunamo matriko $\mathbf{N}$ in vektor $\mathbf{t}$ ter izračunamo vektor $\mathbf{\Delta}$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} \qquad \mathbf{t} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{\Delta} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t} \tag{1–202}$$

Numeričnih vrednosti v zgornje enačbe nismo dajali, saj je potrebno rešitev poiskati iterativno. Ko dobimo vektor $\mathbf{\Delta}$, popravimo približne vrednosti neznank iz enačbe (1–199) in ponovimo izravnavo. Postopek načeloma ponavljamo vse dokler velja:

$$||\,\mathbf{\Delta}\,|| < \delta \tag{1–203}$$

V enačbi (1–203) operator $||\cdot||$ predstavlja normo vektorja (dolžino vektorja), δ pa neko majhno vrednost (npr. 1×10^{-8}). V našem primeru naredimo samo eno ponovljeno iteracijo, torej izravnamo opazovanja v dveh korakih:

Iteracija # 1:$||\Delta||$ =5,6550 $\times\ 10^{-1}$

Iteracija # 2:$||\Delta||$ =3,8656 $\times\ 10^{-2}$

Po izvedenih 2-ih korakih iteracije so ocenjene neznanke enake:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ -0{,}281 \\ 1{,}325 \\ 2{,}111 \\ 2{,}886 \\ 4{,}078 \end{bmatrix} \tag{1–204}$$

Glede na rešitev neznank iz enačbe (1–204) je enačba optimalne premice, ki se prilega opazovanim koordinatam vseh točke enaka:

$$y = a\,x + b = 0{,}714\,x + -0{,}281 \tag{1–205}$$

Vektor popravkov $\mathbf{v}$ in vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$ sta:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{x_3} \\ v_{y_3} \\ v_{x_4} \\ v_{y_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}025 \\ -0{,}035 \\ -0{,}089 \\ 0{,}126 \\ 0{,}086 \\ -0{,}121 \\ -0{,}022 \\ 0{,}030 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}325 \\ 0{,}665 \\ 2{,}111 \\ 1{,}226 \\ 2{,}886 \\ 1{,}779 \\ 4{,}078 \\ 2{,}630 \end{bmatrix} \tag{1–206}$$