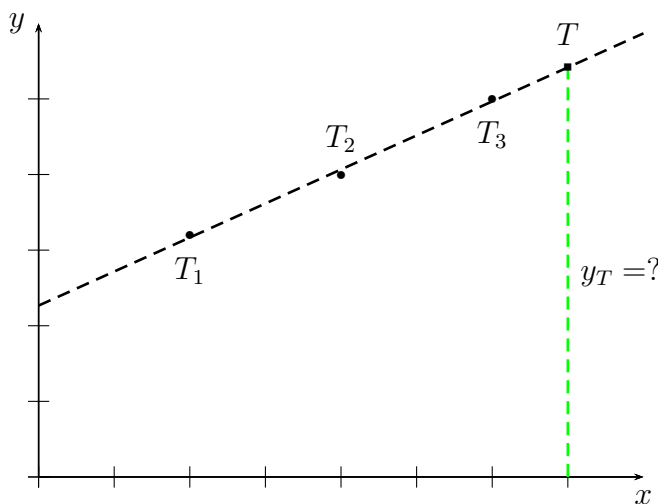


## MNK – Premica v ravnini:

V ravnini imamo tri točke, za katere imamo dane koordinate  $x$ , koordinate  $y$  pa so opazovane,  $T_1(x_1, y_1) = (2.0, 3.2)$ ,  $T_2(x_2, y_2) = (4.0, 4.0)$  in  $T_3(x_3, y_3) = (6.0, 5.0)$ , kot prikazuje slika 1. Z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja in določi enačbo premice, ki se optimalno prilega podanim točkam. Izračunaj koordinato  $y_T$  za točko  $T$ , ki ima  $x_T = 7.0$ .



Slika 1: Točke v ravnini

### Direktna metoda

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj  $\mathbf{l}$  in matriko uteži  $\mathbf{P}$  (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo  $n$ ,  $n_0$  in  $r$ .

Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj  $n = \underline{\quad}$ . Vektor opazovanj  $\mathbf{l}$  je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana. Matrika uteži je velikosti  $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$ , uteži opazovanj pa so na koncu enake:

$$p_1 = \underline{\quad} \quad p_2 = \underline{\quad} \quad p_3 = \underline{\quad} \quad (2)$$

Minimalno število opazovanj je  $n_0 = \underline{\quad}$ , število nadštevilnih opazovanj pa  $r = n - n_0 = \underline{\quad}$ .

2. Sestavimo  $r$  pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.

Število pogojnih enačb je torej  $r = \underline{\quad}$ , v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Kako dobiti pogoj, katerega morajo točke izpolnjevati pri premici? Če izračunamo

naklonski koeficient iz točk  $T_1$  in  $T_2$ , mora biti ta enak naklonskemu koeficientu iz točk  $T_2$  in  $T_3$ . Pogoj ima obliko:

$$\frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} = \frac{\hat{y}_3 - \hat{y}_2}{x_3 - x_2} \quad \rightarrow \quad \hat{y}_2 - \hat{y}_1 = \hat{y}_3 - \hat{y}_2 \quad (3)$$

Če sedaj pogoj iz enačbe 3 preuredimo, sestavimo pogojno enačbo:

$$F_1 \equiv \hat{y}_1 - 2\hat{y}_2 + \hat{y}_3 = 0 \quad (4)$$

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja  $\hat{l}_i$  nadomestimo z zvezo  $\hat{l}_i = l_i + v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

V pogojne enačbe 4 vstavimo  $\hat{y}_i = y_i + v_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) in dobimo:

$$F_1 \equiv y_1 + v_1 - 2(y_2 + v_2) + y_3 + v_3 = 0 \quad (5)$$

4. Izpostavimo  $r$  popravkov v odvisnosti od ostalih  $n_0$  popravkov.

Izpostaviti moramo  $r = \underline{\quad}$  popravkov v odvisnosti od ostalih popravkov, ki nastopajo v pogojni enačbi Zapišemo:

$$F_1 \equiv v_3 = -y_1 - v_1 + 2(y_2 + v_2) - y_3 \quad (6)$$

Če v enačbi 6 vstavimo vrednosti opazovanih koordinat  $y$ , dobimo:

$$F_1 \equiv v_3 = 2v_2 - v_1 + \underline{\quad} \quad (7)$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo  $\Phi$ .

Karakteristična funkcija  $\Phi$  ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 \Rightarrow \min. \quad (8)$$

Uteži opazovanj dobimo iz enačbe 2.

6. V karakteristični funkciji  $\Phi$  izpostavljenih  $r$  popravkov nadomestimo z  $n_0$  ostalimi popravki.

Če uporabimo enačbi 6 in 7 ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe 2, potem za funkcijo  $\Phi$  iz enačbe 8 dobimo:

$$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 (2v_2 - v_1 + \underline{\quad})^2 \Rightarrow \min. \quad (9)$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji  $\Phi$  nastopata samo še dva popravka,  $v_1$  in  $v_2$ . Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije  $\Phi(v_1, v_2)$ .

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije  $\Phi$ .

Najmanjšo vrednost funkcije  $\Phi(v_1, v_2)$  iz enačbe 9 bomo dobili tako, da bomo poiškali parcialne odvode po obeh popravkih in jih izenačili z 0.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} &= 2p_1 v_1 + 2p_3 (2v_2 - v_1 + \underline{\quad})(-1) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} &= 2p_2 v_2 + 2p_3 (2v_2 - v_1 + \underline{\quad})2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

V enačbi 10 smo dobili dve enačbi z dvema neznanima popravkoma,  $v_1$  in  $v_2$ .

8. Rešimo sistem  $n_0$  enačb v katerih nastopa  $n_0$  popravkov in dobimo njihove vrednosti. Enačbi 10 prvo delimo z 2, potem pa preuredimo, da dobimo dve enačbi z dvema neznankama, in sicer:

$$\underline{\quad}v_1 + \underline{\quad}v_2 = \underline{\quad} \quad (11)$$

$$\underline{\quad}v_1 + \underline{\quad}v_2 = \underline{\quad} \quad (12)$$

Rešimo enačbi 12 in dobimo:

$$v_1 = \underline{\quad} \quad v_2 = \underline{\quad} \quad (13)$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih  $r$  popravkov. Uporabimo enačbi 6 oziroma 7 in dobimo vse ostale popravke:

$$v_3 = \underline{\quad} \quad (14)$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj  $\hat{\mathbf{l}}$ .

Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\hat{y}_1 = \underline{\quad} \quad \hat{y}_2 = \underline{\quad} \quad \hat{y}_3 = \underline{\quad} \quad (15)$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.

Prvo moramo izračunati enačbo premice, ki se optimalno prilega točkam. Izračunamo koeficient  $a$  in prosti člen  $b$ , uporabimo pa izravnana opazovanja iz enačbe 15. Dobimo:

$$a = \frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{x_2 - x_1} = \underline{\quad} \quad b = \hat{y}_1 - ax_1 = \underline{\quad} \quad (16)$$

Sedaj uporabimo koeficiente premice iz enačbe 16, da izračunamo  $y_T$  točke  $T$ , pri koordinati  $x_T = 7.0$ :

$$y_T = ax_T + b = \underline{\quad} \quad (17)$$

## Posredna metoda

Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj  $\mathbf{l}$  in matriko uteži  $\mathbf{P}$  (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo  $n$ ,  $n_0$  in  $r$ .

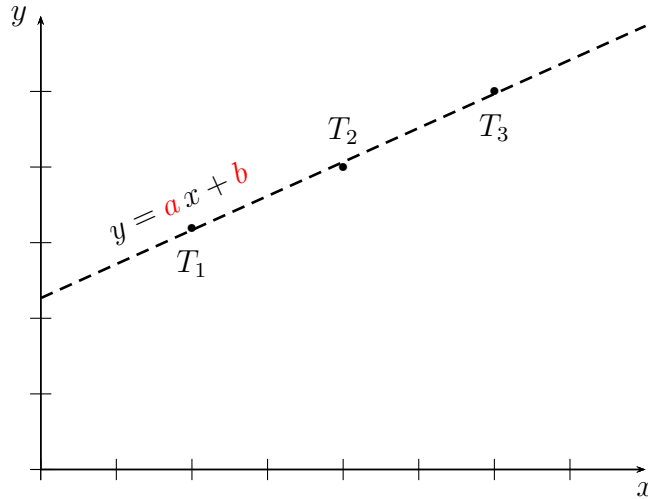
Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, glej alinejo 1, na koncu pa dobimo  $n = \underline{\quad}$ ,  $n_0 = \underline{\quad}$ ,  $r = \underline{\quad}$  in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$p_1 = \underline{\quad} \quad p_2 = \underline{\quad} \quad p_3 = \underline{\quad} \quad (19)$$

2. Nastavimo  $u = n_0$  neznank v funkcionalni model.

Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako  $u = n_0 = \underline{\quad}$ . Ker naloga zahteva izračun premice, ki se optimalno prilega točkam, je najbolj smiselno nastaviti parametra premice, to sta naklonski koeficient  $a$  in prosti člen  $b$ .



Slika 2: Izbira neznank pri izračunu optimalne premice

3. Sestavimo  $n$  enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.

Sestavimo  $n = \underline{\quad}$  enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznankami. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{y}_1 = a x_1 + b \\ F_2 &\equiv \hat{y}_2 = a x_2 + b \\ F_3 &\equiv \hat{y}_3 = a x_3 + b \end{aligned} \quad (20)$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja  $\hat{l}_i$  nadomestimo z zvezo  $\hat{l}_i = l_i + v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv y_1 + v_1 = a x_1 + b \\ F_2 &\equiv y_2 + v_2 = a x_2 + b \\ F_3 &\equiv y_3 + v_3 = a x_3 + b \end{aligned} \quad (21)$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = a x_1 + b - y_1 \\ F_2 &\equiv v_2 = a x_2 + b - y_2 \\ F_3 &\equiv v_3 = a x_3 + b - y_3 \end{aligned} \quad (22)$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo  $\Phi$ .

Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo 8), uteži dobimo iz enačbe 2:

$$\Phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 \Rightarrow \min. \quad (23)$$

7. V karakteristični funkciji  $\Phi$  popravke nadomestimo z neznankami.

Uporabimo funkcijo  $\Phi$  in enačbe 22:

$$\Phi = p_1(a x_1 + b - y_1)^2 + p_2(a x_2 + b - y_2)^2 + p_3(a x_3 + b - y_3)^2 \Rightarrow \min. \quad (24)$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji  $\Phi$  nastopata obe neznanki,  $a$  in  $b$ . Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije  $\Phi(a, b)$ .

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije  $\Phi$ .

Najmanjšo vrednost funkcije  $\Phi(a, b)$  iz enačbe 24 bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode funkcije  $\Phi(a, b)$  po obeh neznankah (in jih izenačili z 0).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= 2p_1(a x_1 + b - y_1)x_1 + 2p_2(a x_2 + b - y_2)x_2 + 2p_3(a x_3 + b - y_3)x_3 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= 2p_1(a x_1 + b - y_1) + 2p_2(a x_2 + b - y_2) + 2p_3(a x_3 + b - y_3) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

V enačbi 25 smo dobili dve enačbi z dvema neznankama.

9. Rešimo sistem  $u$  enačb v katerih nastopa  $u$  neznank, izračunamo vrednosti neznank.

Enačbe 25 najprej delimo z 2, nato pa jih preuredimo, da dobimo:

$$\begin{aligned} \underline{\quad} a + \underline{\quad} b &= \underline{\quad} \\ \underline{\quad} a + \underline{\quad} b &= \underline{\quad} \end{aligned} \quad (26)$$

Rešimo enačbi 26 in dobimo vrednosti obeh neznank,  $a$  in  $b$ :

$$a = \underline{\quad} \quad b = \underline{\quad} \quad (27)$$

## 10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb 22.

$$\begin{aligned} v_1 &= a x_1 + b - y_1 = \underline{\quad} \\ v_2 &= a x_2 + b - y_2 = \underline{\quad} \\ v_3 &= a x_3 + b - y_3 = \underline{\quad} \end{aligned} \quad (28)$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj  $\hat{1}$ .

Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\hat{y}_1 = \underline{\quad} \quad \hat{y}_2 = \underline{\quad} \quad \hat{y}_3 = \underline{\quad} \quad (29)$$

Za izračun  $y_T$  točke  $T$ , kjer je  $x_T = 7.0$ , uporabimo ocenjene neznanke iz 27 in dobimo:

$$y_T = a x_T + b = \underline{\quad} \quad (30)$$