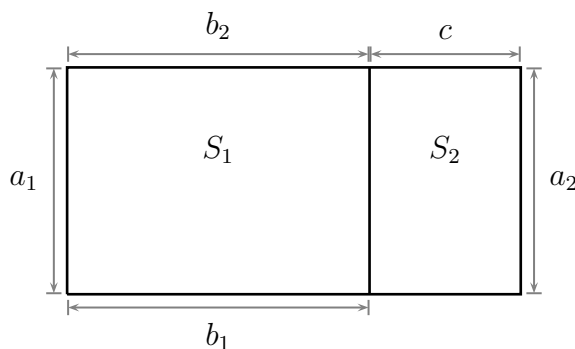


MNK – Parcela, sestavljena iz dveh pravokotnikov:

Parcela je sestavljena iz dveh delov, kot prikazuje slika 1. Da bi določili površini obeh delov (S_1 in S_2) smo izmerili 5 stranic, in sicer: $a_1 = 35.0$ m ($\sigma_{a_1} = 0.1$ m), $a_2 = 35.1$ m ($\sigma_{a_2} = 0.2$ m), $b_1 = 20.0$ m ($\sigma_{b_1} = 0.2$ m), $b_2 = 19.8$ m ($\sigma_{b_2} = 0.1$ m) in $c = 10.0$ m ($\sigma_c = 0.1$ m). Z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja in določi površini S_1 in S_2 .



Slika 1: Skica obeh delov parcele in opazovane stranice parcel

Direktna metoda

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj \mathbf{l} in matriko uteži \mathbf{P} (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n = \underline{\quad}$. Vektor opazovanj \mathbf{l} je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \text{ m} \\ \underline{\quad} \text{ m} \\ \underline{\quad} \text{ m} \\ \underline{\quad} \text{ m} \\ \underline{\quad} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Opazovanja so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Prvo sestavimo matriko $\mathbf{\Sigma}$, izberemo referenčno varianco σ_0^2 , izračunamo matriko \mathbf{Q} in matriko uteži \mathbf{P} . Da dobimo matriko uteži, ki ima samo cela števila (najmanjša možna), moramo za referenčno varianco a-priori izbrati $\sigma_0^2 = \underline{\quad} \text{ m}^2$. Matrika uteži je velikosti $\underline{\quad} \times \underline{\quad}$, na koncu pa so uteži opazovanj enake:

$$p_{a_1} = \underline{\quad} \quad p_{a_2} = \underline{\quad} \quad p_{b_1} = \underline{\quad} \quad p_{b_2} = \underline{\quad} \quad p_c = \underline{\quad} \quad (2)$$

Minimalno število opazovanj je $n_0 = \underline{\quad}$, število nadštevilnih opazovanj pa $r = n - n_0 = \underline{\quad}$.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.

Število pogojnih enačb je torej $r = \underline{\quad}$, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja. Pogojni enačbi imata obliko:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}_1 = \hat{a}_2 \\ F_2 &\equiv \hat{b}_1 = \hat{b}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Vidimo, da nobena enačba iz 3 ne vsebuje opazovanja \hat{c} . V pravilih za sestavo pogojnih enačb (glej dokument [MNK_SistemEnacb.pdf](#)) je zapisano, da moramo v vseh pogojnih enačbah uporabiti vsa opazovanja. Obstajajo pa izjeme, kot v tem primeru. Če v geometriji problema določeno količino (kot je pri tem primeru stranica c) opazujemo tako, da ni nadštevilo izmerjena, potem tega opazovanja ne moremo vključiti v pogojne enačbe.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja \hat{l}_i nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

V pogojne enačbe 3 vstavimo $\hat{i} = i + v_i$, ($i = a_1, a_2, b_1, b_2$) in dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv a_1 + v_{a_1} = a_2 + v_{a_2} \\ F_2 &\equiv b_1 + v_{b_1} = b_2 + v_{b_2} \end{aligned} \quad (4)$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.

Izpostaviti moramo $r = \underline{\quad}$ popravka v odvisnosti od ostalih popravkov, ki še nastopajo v pogojnih enačbah. Zapišemo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{a_2} = v_{a_1} + a_1 - a_2 \\ F_2 &\equiv v_{b_2} = v_{b_1} + b_1 - b_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Če v enačbi 5 vstavimo vrednosti opazovanih stranic, dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{a_2} = v_{a_1} + \underline{\quad}\text{m} \\ F_2 &\equiv v_{b_2} = v_{b_1} + \underline{\quad}\text{m} \end{aligned} \quad (6)$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ .

Karakteristična funkcija Φ ima obliko:

$$\Phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = p_{a_1} v_{a_1}^2 + p_{a_2} v_{a_2}^2 + p_{b_1} v_{b_1}^2 + p_{b_2} v_{b_2}^2 + p_c v_c^2 \Rightarrow \min. \quad (7)$$

Uteži opazovanj dobimo iz enačbe 2, vidimo pa, da v enačbi 7 nastopa tudi popravek v_c , ne glede na to, da opazovanje c v pogojnih enačbah ne nastopa.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.

Če uporabimo enačbi 5 in 6 ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe 2, potem za funkcijo Φ iz enačbe 7 dobimo:

$$\Phi = p_{a_1} v_{a_1}^2 + p_{a_2} (v_{a_1} + \underline{\quad}\text{m})^2 + p_{b_1} v_{b_1}^2 + p_{b_2} (v_{b_1} + \underline{\quad}\text{m})^2 + p_c v_c^2 \Rightarrow \min. \quad (8)$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopajo trije popravki, v_{a_1} , v_{b_1} in v_c . Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_{a_1}, v_{b_1}, v_c)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ .

Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_{a_1}, v_{b_1}, v_c)$ iz enačbe 8 bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode po vseh popravkih in jih izenačili z 0.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial v_{a_1}} &= 2p_{a_1}v_{a_1} + 2p_{a_2}(v_{a_1} + \text{---m}) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_{b_1}} &= 2p_{b_1}v_{b_1} + 2p_{b_2}(v_{b_1} + \text{---m}) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v_c} &= 2p_c v_c = 0\end{aligned}\tag{9}$$

V enačbi 9 smo dobili tri enačbe s tremi neznanimi popravki, v_{a_1} , v_{b_1} in v_c .

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.

Iz enačb 9 vidimo, da v vsaki enačbi nastopa le en popravek, zato lahko popravke neposredno izračunamo. Dobimo:

$$\begin{aligned}v_{a_1} &= \text{---m} \\ v_{b_1} &= \text{---m} \\ v_c &= \text{---m}\end{aligned}\tag{10}$$

Popravek v_c smo lahko dobili neposredno (glej zadnjo enačbo 9). Rezultat je pravilen in logičen, saj stranica c ni nadštevilno izmerjena.

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.

Uporabimo enačbi 5 oziroma 6 in dobimo vse ostale popravke:

$$\begin{aligned}v_{a_2} &= \text{---m} \\ v_{b_2} &= \text{---m}\end{aligned}\tag{11}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{I}}$.

Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \text{---m} & \hat{a}_2 &= \text{---m} \\ \hat{b}_1 &= \text{---m} & \hat{b}_2 &= \text{---m} \\ \hat{c} &= \text{---m}\end{aligned}\tag{12}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznan) naloge.

Naloga zahteva izračun obeh delov površin S_1 in S_2 . Pri izravnanih opazovanjih je vseeno, katero kombinacijo opazovanj uporabimo, vedno dobimo iste rezultate (izravnana opazovanja so skladna). Dobimo:

$$\begin{aligned}S_1 &= \hat{a}_1 \hat{b}_1 = \hat{a}_1 \hat{b}_2 = \hat{a}_2 \hat{b}_1 = \hat{a}_2 \hat{b}_2 = \text{---m}^2 \\ S_2 &= \hat{a}_1 \hat{c} = \hat{a}_2 \hat{c} = \text{---m}^2\end{aligned}\tag{13}$$

Posredna metoda

Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj \mathbf{l} in matriko uteži \mathbf{P} (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n , n_0 in r .

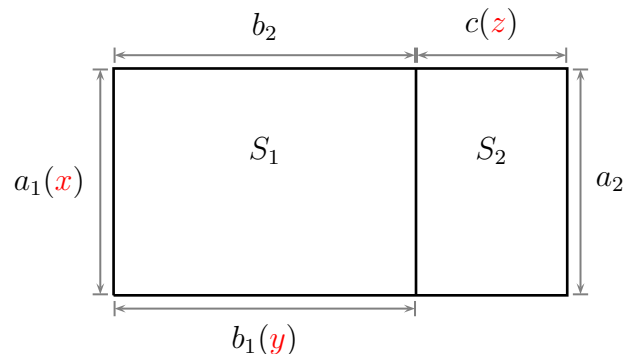
Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, glej alinejo 1, na koncu pa dobimo $n = \underline{\quad}$, $n_0 = \underline{\quad}$, $r = \underline{\quad}$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} \text{m} \\ \underline{\quad} \text{m} \\ \underline{\quad} \text{m} \\ \underline{\quad} \text{m} \\ \underline{\quad} \text{m} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$p_{a_1} = \underline{\quad} \quad p_{a_2} = \underline{\quad} \quad p_{b_1} = \underline{\quad} \quad p_{b_2} = \underline{\quad} \quad p_c = \underline{\quad} \quad (15)$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.

Izbrati moramo neznanke, kjer je število neznank enako $u = n_0 = \underline{\quad}$. Izbrali bomo tri stranice, kot prikazuje slika 2, neznanke pa označili z x , y in z . Neznanka x predstavlja stranico a , y stranico b in z stranico c .



Slika 2: Izbira neznank v obravnavani parceli

3. Sestavimo n enačb popravkov - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.

Sestavimo $n = \underline{\quad}$ enačb popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{a}_1 = x \\ F_2 &\equiv \hat{a}_2 = x \\ F_3 &\equiv \hat{b}_1 = y \\ F_4 &\equiv \hat{b}_2 = y \\ F_5 &\equiv \hat{c} = z \end{aligned} \quad (16)$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja \hat{l}_i nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$

($i = 1, 2, \dots, n$).

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv a_1 + v_{a_1} = x \\ F_2 &\equiv a_2 + v_{a_2} = x \\ F_3 &\equiv b_1 + v_{b_1} = y \\ F_4 &\equiv b_2 + v_{b_2} = y \\ F_5 &\equiv c + v_c = z \end{aligned} \quad (17)$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_{a_1} = x - a_1 \\ F_2 &\equiv v_{a_2} = x - a_2 \\ F_3 &\equiv v_{b_1} = y - b_1 \\ F_4 &\equiv v_{b_2} = y - b_2 \\ F_5 &\equiv v_c = z - c \end{aligned} \quad (18)$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ .

Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo 7), uteži dobimo iz enačbe 2:

$$\Phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = p_{a_1} v_{a_1}^2 + p_{a_2} v_{a_2}^2 + p_{b_1} v_{b_1}^2 + p_{b_2} v_{b_2}^2 + p_c v_c^2 \Rightarrow \min. \quad (19)$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami.

Uporabimo funkcijo Φ in enačbe 18:

$$\Phi = p_{a_1} (x - a_1)^2 + p_{a_2} (x - a_2)^2 + p_{b_1} (y - b_1)^2 + p_{b_2} (y - b_2)^2 + p_c (z - c)^2 \Rightarrow \min. \quad (20)$$

Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopajo tri neznanke, x , y in z . Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y, z)$.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ .

Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y, z)$ iz enačbe 20 bomo dobili tako, da bomo poiskali parcialne odvode funkcije $\Phi(x, y, z)$ po vseh treh neznankah (in jih izenačili z 0).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2p_{a_1} (x - a_1) + 2p_{a_2} (x - a_2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2p_{b_1} (y - b_1) + 2p_{b_2} (y - b_2) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 2p_c (z - c) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

V enačbi 21 smo dobili tri enačbe s tremi neznankami.

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank. Enačbe 21 preuredimo in izračunamo neznanke. Tudi tu je v vsaki enačbi le ena neznanka, zato jih rešimo neposredno:

$$\begin{aligned} x &= \underline{\quad} \text{m} \\ y &= \underline{\quad} \text{m} \\ z &= \underline{\quad} \text{m} \end{aligned} \quad (22)$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb 18.

$$\begin{aligned}v_{a_1} &= x - a_1 = \underline{\quad}\text{m} \\v_{a_2} &= x - a_2 = \underline{\quad}\text{m} \\v_{b_1} &= y - b_1 = \underline{\quad}\text{m} \\v_{b_2} &= y - b_2 = \underline{\quad}\text{m} \\v_c &= z - c = \underline{\quad}\text{m}\end{aligned}\tag{23}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{I}}$.

Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \underline{\quad}\text{m} & \hat{a}_2 &= \underline{\quad}\text{m} \\ \hat{b}_1 &= \underline{\quad}\text{m} & \hat{b}_2 &= \underline{\quad}\text{m} \\ \hat{c} &= \underline{\quad}\text{m}\end{aligned}\tag{24}$$

Na koncu izračunamo še površini obeh delov parcel. Uporabili bomo neznanke iz enačbe 22:

$$\begin{aligned}S_1 &= x y = \underline{\quad}\text{m}^2 \\ S_2 &= x z = \underline{\quad}\text{m}^2\end{aligned}\tag{25}$$