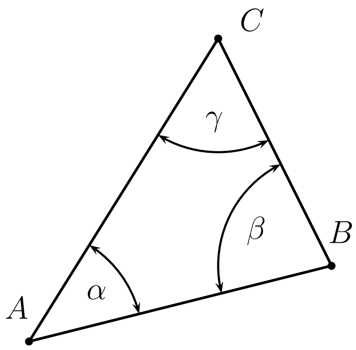
MNK – Merjeni vsi koti trikotnika:

V trikotniku smo izmerili vse tri notranje kote in dobili: $\alpha = 41°33'$, $\beta = 78°57'$ in $\gamma = 59°27'$. Če so opazovanja enake natančnosti in medseboj nekorelirana, z direktno in posredno metodo po MNK izravnaj opazovanja.



Slika 1: Skica trikotnika in vseh notranjih kotov

Direktna metoda

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n =$ ___. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_^\circ\_\_' \\ \_\_^\circ\_\_' \\ \_\_^\circ\_\_' \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Opazovanja so enake natančnosti in medseboj nekorelirana, zato je matrika uteži velikosti ___ × ___ in enaka:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \to \; p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = \_\_ \qquad p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\gamma} = p_{\beta\gamma} = \_\_ \tag{2}$$

   Minimalno število opazovanj je $n_0 =$ ___, število nadštevilnih opazovanj pa $r = n - n_0 =$ ___.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je torej $r =$ ___, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja in konstanta (katera je tu konstanta?). Pogoj, ki velja za naša opazovanja, je seveda:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = \_\_^\circ \tag{3}$$

Pogoj iz enačbe 3 uporabimo za sestavo pogojne enačbe, ki je:

$$F_1 \equiv \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = \_\_\_^\circ \tag{4}$$

Sedaj že vemo, da je v enačbi 4 preveč neznanih količin, zato enačba ni enolično rešljiva.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   V enačbo iz 4 vstavimo $\hat{i} = i + v_i$, $(i = \alpha, \beta, \gamma)$ in dobimo:
   $$F_1 \equiv \alpha + v_\alpha + \beta + v_\beta + \gamma + v_\gamma = \_\_\_^\circ \tag{5}$$
   Tudi preoblikovani enačbi v 5 vsebujeta preveč neznanih količin za enolično rešitev.
4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   Izpostaviti moramo $r = \_\_\_$ (ker imamo toliko enačb) popravek v odvisnosti od ostalih $n_0 = \_\_\_$ popravkov. Glede na enačbo 5 bomo izpostavili popravek v_γ v odvisnosti od popravkov v_α in v_β. Dobimo:
   $$F_1 \equiv v_\gamma = \_\_\_^\circ - \alpha - v_\alpha - \beta - v_\beta - \gamma \tag{6}$$
   Če v enačbo 6 vstavimo vrednosti opazovanih kotov, dobimo:
   $$F_1 \equiv v_\gamma = \_\_\_' - v_\alpha - v_\beta \tag{7}$$
5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija Φ ima obliko:
   $$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma v_\gamma^2 \Rightarrow \min. \tag{8}$$
   Uteži opazovanj dobimo iz enačbe 2.
6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   Če uporabimo enačbi 6 in 7 ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe 2, potem za funkcijo Φ iz enačbe 8 dobimo:
   $$\Phi = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma(\_\_\_' - v_\alpha - v_\beta)^2 \Rightarrow \min. \tag{9}$$
   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata dva popravka, v_α in v_β. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_\alpha, v_\beta)$.
7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_\alpha, v_\beta)$ iz enačbe 9 bomo dobili tako, da bomo poiskali oba parcialna odvoda, $\partial\Phi/\partial v_\alpha$ in $\partial\Phi/\partial v_\beta$, in ju izenačili z 0.
   $$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial v_\alpha} &= 2p_\alpha v_\alpha + 2p_\gamma(\_\_\_' - v_\alpha - v_\beta)(-1) = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v_\beta} &= 2p_\beta v_\beta + 2p_\gamma(\_\_\_' - v_\alpha - v_\beta)(-1) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$
   V enačbi 10 smo dobili dve enačbi z dvema neznanima količinama, popravkoma v_α in v_β.

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
Enačbi 10 preuredimo, da dobimo dve enačbi z dvema neznankama, in sicer:

$$\_\_v_\alpha + \_\_v_\beta = \_\_' \tag{11}$$
$$\_\_v_\alpha + \_\_v_\beta = \_\_' \tag{12}$$

Rešimo enačbi 12 in dobimo:

$$v_\alpha = \_\_' \qquad v_\beta = \_\_' \tag{13}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
Uporabimo enačbo 6 oziroma 7 in dobimo še popravek tretjega kota:

$$v_\gamma = \_\_' - v_\alpha - v_\beta = \_\_' \tag{14}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo izravnana opazovanja:

$$\hat{\alpha} = \_\_^\circ\_\_' \qquad \hat{\beta} = \_\_^\circ\_\_' \qquad \hat{\gamma} = \_\_^\circ\_\_' \tag{15}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
Ni neznank pri tej nalogi.

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- Kako v tem primeru vidimo "aritmetično sredino" rezultatov? Namig: kako se razdeli odstopanje pogojne enačbe na popravke...

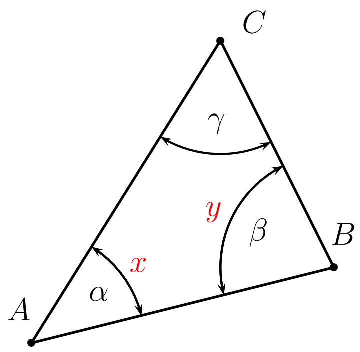
Posredna metoda

Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, glej alinejo 1, na koncu pa dobimo $n = \_\_$, $n_0 = \_\_$, $r = \_\_$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_^\circ\_\_' \\ \_\_^\circ\_\_' \\ \_\_^\circ\_\_' \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \rightarrow p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = \_\_ \qquad p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\gamma} = p_{\beta\gamma} = \_\_ \tag{17}$$



Slika 2: Izbira neznank v trikotniku, ko merimo notranje kote

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Izbrati moramo $u = n_0 =$ ___ neznank. Izbrali bomo dva neznana kota, kot prikazuje slika 2, neznanki pa označili z x in y. Neznanka x predstavlja kot α, medtem kot neznanka y kot β.

3. Sestavimo n enačb popravko - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n =$ ___ enačbe popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{\alpha} = x \\ F_2 &\equiv \hat{\beta} = y \\ F_3 &\equiv \hat{\gamma} = \_\_\_^\circ - x - y \end{aligned} \tag{18}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \alpha + v_\alpha = x \\ F_2 &\equiv \beta + v_\beta = y \\ F_3 &\equiv \gamma + v_\gamma = \_\_\_^\circ - x - y \end{aligned} \tag{19}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_\alpha = x - \alpha \\ F_2 &\equiv v_\beta = y - \beta \\ F_3 &\equiv v_\gamma = \_\_\_^\circ - x - y - \gamma \end{aligned} \tag{20}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo 8), uteži dobimo iz enačbe 2:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_\alpha v_\alpha^2 + p_\beta v_\beta^2 + p_\gamma v_\gamma^2 \Rightarrow \text{min.} \tag{21}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami. Uporabimo funkcijo Φ in enačbe 20:

$$\Phi = p_\alpha(x - \alpha)^2 + p_\beta(y - \beta)^2 + p_\gamma(\_\_\_^\circ - x - y - \gamma)^2 \Rightarrow \text{min.} \tag{22}$$

   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopata dve neznanki, x in y. Iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y)$.

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(x, y)$ iz enačbe 22 bomo dobili tako, da bomo poiskali oba parcialna odvoda, $\partial\Phi/\partial x$ in $\partial\Phi/\partial x$, in ju izenačili z 0.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x} =& 2p_\alpha(x-\alpha) + 2p_\gamma(\_\_\_^\circ - x - y - \gamma)(-1) = 0\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} =& 2p_\beta(y-\beta) + 2p_\gamma(\_\_\_^\circ - x - y - \gamma)(-1) = 0\end{aligned} \tag{23}$$

V enačbi 23 smo dobili dve enačbi z dvema neznankama, x in y.

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.
Enačbi 23 preuredimo in dobimo:

$$\begin{aligned}\_\_\_x + \_\_\_y &= \_\_\_^\circ\_\_\_'\\ \_\_\_x + \_\_\_y &= \_\_\_^\circ\_\_\_'\end{aligned} \tag{24}$$

Rešimo enačbi 24 in dobimo vrednosti obeh neznank:

$$x = \_\_\_^\circ\_\_\_' \qquad y = \_\_\_^\circ\_\_\_' \tag{25}$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb 20.

$$\begin{aligned}F_1 &\equiv v_\alpha = x - \alpha = \_\_\_'\\ F_2 &\equiv v_\beta = y - \beta = \_\_\_'\\ F_3 &\equiv v_\gamma = \_\_\_^\circ - x - y - \gamma = \_\_\_'\end{aligned} \tag{26}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\hat{\alpha} = \_\_\_^\circ\_\_\_' \qquad \hat{\beta} = \_\_\_^\circ\_\_\_' \qquad \hat{\gamma} = \_\_\_^\circ\_\_\_' \tag{27}$$