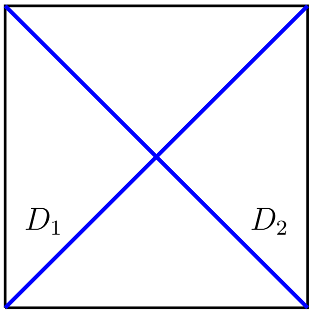
MNK – Diagonala kvadrata merjena dvakrat:

V kvadratu smo izmerili diagonalo dvakrat, kot prikazuje slika 1, in dobili $D_1 = 5.2\,\mathrm{m}$ ter $D_2 = 5.1\,\mathrm{m}$.



Slika 1: Skica kvadrata in opazovanih diagonal v kvadratu

Z direktno in posredno metodo MNK izravnaj opazovanja in izračunaj velikost kvadrata, če:

1. sta opazovanji različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0.1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0.2\,\mathrm{m}$, in medseboj nekorelirani ter
2. sta opazovanji različnih natančnosti, $\sigma_1 = 0.1\,\mathrm{m}$ in $\sigma_2 = 0.2\,\mathrm{m}$, in medseboj korelirani, $\rho_{12} = 0.5$.

Postopek izravnave po MNK, z uporabo direktne kot tudi posredne metode, je opisan v dokumentu *MNK_SistemEnacb.pdf*, zato bodo izračuni temeljili na tam definiranih postopkih.

Direktna metoda

Glede na podatke naloge moramo narediti dva izračuna, prvič, ko sta opazovanji različne natančnosti a nekorelirani (alineja 1), drugič pa, ko sta opazovanji dodatno še korelirani (alineja 2).

Opazovanji sta različne natančnosti in nekorelirani

Koraki direktne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Iz naloge je razvidno, da je število opazovanj $n =$ ___. Vektor opazovanji $\mathbf{l}$ je oblike:
   $$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m} \\ \_\_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \tag{1}$$
   Opazovanja so različne natančnosti, a medseboj nekorelirana. Kovariančna matrika je velikosti ___ $\times$ ___ in ima obliko: :
   $$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\mathrm{m}^2 & 0 \\ 0 & \_\_\_\mathrm{m}^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$
   Izberemo si referenčno varianco a-priori σ_0^2, in sicer tako, da bomo imeli v matriki uteži $\mathbf{P}$ najmanjša možna cela števila. Izberemo si torej:
   $$\sigma_0^2 = \_\_\_\mathrm{m}^2 \tag{3}$$
   Prvo izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ kot:
   $$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & 0 \\ 0 & \_\_\_ \end{bmatrix} \tag{4}$$
   V drugem koraku pa še matriko uteži $\mathbf{P}$:
   $$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & 0 \\ 0 & \_\_\_ \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = \_\_\_ \quad p_2 = \_\_\_ \tag{5}$$
   Če želimo dobiti velikost kvadrata, potem velja $n_0 =$ ___, torej je število nadštevilnih opazovanj $r = n - n_0 =$ ___.

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Število pogojnih enačb je torej $r =$ ___, v katerih nastopajo le izravnana opazovanja (in morebitne konstante). Pogoj, ki velja za naši dve opazovanji, je seveda:
   $$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \tag{6}$$
   Pogoj iz enačbe 6 uporabimo za sestavo pogojne enačbe, ki je:
   $$F_1 \equiv \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \tag{7}$$
   V enačbi 7 nastopada dve izravnani opazovanji, zato sistem ni enolično rešljiv.

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   V enačbo iz 7 vstavimo $\hat{D}_i = D_i + v_i$, $(i = 1, 2)$ in dobimo:
   $$F_1 \equiv D_1 + v_1 = D_2 + v_2 \tag{8}$$
   Tudi preoblikovani enačbi v 8 vsebujeta dve neznane količine, tokrat oba popravka opazovanj.

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   Izpostaviti moramo $r = 1$ (ker imamo toliko enačb) popravek v odvisnosti od ostalega $n_0 = 1$ popravka. Glede na enačbo 8 bomo izpostavili popravek v_2 v odvisnosti od popravka v_1. Dobimo:
   $$F_1 \equiv v_2 = v_1 + D_1 - D_2 \tag{9}$$
   Če v enačbi 9 vstavimo vrednosti opazovanih diagonal, dobimo:
   $$F_1 \equiv v_2 = v_1 + \underline{}\,\mathrm{m} \tag{10}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija Φ ima obliko:
   $$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 \Rightarrow \min. \tag{11}$$
   saj imamo opazovanja različne natančnosti, ki pa so medseboj nekorelirana.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   Če uporabimo enačbi 9 in 10 ter upoštevamo uteži opazovanj iz enačbe 5, potem za funkcijo Φ iz enačbe 11 dobimo:
   $$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 (v_1 + D_1 - D_2)^2 = 4v_1^2 + 1\,(v_1 + \underline{}\,\mathrm{m})^2 \Rightarrow \min. \tag{12}$$
   Vidimo, da v karakteristični funkciji Φ nastopa le še popravek v_1, iščemo torej najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$ iz enačbe 12 bomo dobili tako, da bomo poiskali odvod $\Phi'(v_1)$ in ga izenačili z 0.
   $$\Phi'(v_1) = \frac{d\Phi}{dv_1} = 4 \cdot 2 \cdot v_1 + 1 \cdot 2 \cdot (v_1 + \underline{}\,\mathrm{m}) = 0 \tag{13}$$

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
   Ker imamo $n_0 = 1$, pomeni, da smo z odvajanjem v enačbi 13 dobili eno enačbo z eno neznanko (v_1). Če enačbo 13 preuredimo in rešimo, dobimo:
   $$v_1 = \underline{}\,\mathrm{m} \tag{14}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
   Uporabimo enačbo 9 oziroma 10 in dobimo še popravek druge diagonale:

$$v_2 = v_1 + \_\_\text{m} = \_\_\text{m} \tag{15}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo:

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \_\_\text{m} \tag{16}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
    Velikost kvadrata najlažje podamo tako, da podamo njegovo stranico a. Velja:

$$a = \frac{\hat{D}_1}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{D}_2}{\sqrt{2}} = \_\_\text{m} \tag{17}$$

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- V kakšnem razmerju sta popravka opazovanj (njuni absolutni vrednosti)? V kakšnem razmerju pa sta uteži opazovanj? Ali je kakšna povezava?

Opazovanji sta različne natančnosti in korelirani

Korake bomo prikazali na enak način kot v primeru nekoreliranih opazovanj, le da bo manj opisov, ki so podani že zgoraj.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Ne spremenijo se količine: $n = \_\_$, $n_0 = \_\_$ in $r = n - n_0 = \_\_$. Vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in pripadajoča kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ pa imata obliko (upoštevajte korelacijo!):

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\text{m}^2 & \_\_\text{m}^2 \\ \_\_\text{m}^2 & \_\_\text{m}^2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

   Izberemo si referenčno varianco a-priori σ_0^2, in sicer tako, da bomo imeli v matriki uteži $\mathbf{P}$ najmanjša možna cela števila. Izberemo si torej:

$$\sigma_0^2 = \_\_\text{m}^2 \tag{19}$$

   Prvo izračunamo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}$ kot:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \tag{20}$$

   V drugem koraku pa še matriko uteži $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = \_\_ \quad p_2 = \_\_ \quad p_{12} = \_\_ \tag{21}$$

   Ker sta opazovanji korelirani, je kovariančna matrika $\mathbf{\Sigma}$ polna (enačba 18), polna je matrika kofaktorjev $\mathbf{Q}$ (enačba 20) in tudi matrika uteži $\mathbf{P}$ (enačba 21).

2. Sestavimo r pogojnih enačb - vsako nadštevilno opazovanje nam omogoča sestavo dodatne pogojne enačbe med opazovanji.
   Pogojni enačbi sta enaki kot zgoraj (enačba 7):

$$F_1 \equiv \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \tag{22}$$

3. V pogojnih enačbah vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   Tudi tu dobimo isto kot zgoraj (enačba 8)

$$F_1 \equiv D_1 + v_1 = D_2 + v_2 \tag{23}$$

4. Izpostavimo r popravkov v odvisnosti od ostalih n_0 popravkov.
   Izpostavimo na enak način kot zgoraj (enačba 9), tudi v numerični obliki (enačba 10):

$$F_1 \equiv v_2 = v_1 + D_1 - D_2 \qquad F_1 \equiv v_2 = v_1 + \_\_\mathrm{m} \tag{24}$$

5. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Ker sta opazovanji korelirani, je funkcija Φ oblike:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + 2p_{12} v_1 v_2 \Rightarrow \min. \tag{25}$$

   Vidimo, da je funkcija Φ v enačbi 25 sestavljena iz dveh delov, različnih natančnosti in vpliva korelacije.

6. V karakteristični funkciji Φ izpostavljenih r popravkov nadomestimo z n_0 ostalimi popravki.
   Če uporabimo enačbi 9 in 10, upoštevamo uteži opazovanj in korelacijo iz enačbe 21, potem za funkcijo Φ iz enačbe 25 dobimo:

$$\Phi = 4v_1^2 + 1\,(v_1 + \_\_\mathrm{m})^2 + 2(-1)v_1\,(v_1 + \_\_\mathrm{m}) \Rightarrow \min. \tag{26}$$

   Tudi tu je karakteristična funkcija Φ odvisna le od popravka v_1, le da je za razliko od enačbe 12 malo daljša. Iščemo pa najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$.

7. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Najmanjšo vrednost funkcije $\Phi(v_1)$ iz enačbe 12 bomo dobili tako, da bomo poiskali odvod $\Phi'(v_1)$ in ga izenačili z 0.

$$\Phi'(v_1) = \frac{d\Phi}{dv_1} = 4 \cdot 2 \cdot v_1 + 1 \cdot 2 \cdot (v_1 + \_\_\mathrm{m}) + 2(-1)(2v_1 + \_\_\mathrm{m}) = 0 \tag{27}$$

8. Rešimo sistem n_0 enačb v katerih nastopa n_0 popravkov in dobimo njihove vrednosti.
   Rešimo enačbo 27 in izračunamo popravek v_1:

$$v_1 = \_\_\mathrm{m} \tag{28}$$

9. Rešene popravke uporabimo za izračun ostalih r popravkov.
   Uporabimo enačbo 9 oziroma 10 in dobimo še popravek druge diagonale:

$$v_2 = \_\_\text{m} \tag{29}$$

10. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.
    Vsem opazovanjem prištejemo popravke in dobimo:

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \_\_\text{m} \tag{30}$$

11. Če naloga zahteva: uporabimo izravnane vrednosti za izračun končnih rezultatov (neznank) naloge.
    Velikost kvadrata najlažje podamo tako, da podamo njegovo stranico a. Velja:

$$a = \frac{\hat{D}_1}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{D}_2}{\sqrt{2}} = \_\_\text{m} \tag{31}$$

Geometrična interpretacija in ponazoritev:

- Ali je izravnana vrednost dolžine še vedno med obema merjenima vrednostima, kot bi po logiki pričakovali? Ali bi lahko dobili izravnano vrednost izven območja obeh dolžin?

Posredna metoda

Opazovanji sta različne natančnosti in nekorelirani

Koraki posredne metode po MNK so sledeči.

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, glej alinejo 1, na koncu pa dobimo $n =$ ___, $n_0 =$ ___, $r =$ ___ in:
$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\text{m} \\ \_\_\text{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \_\_ & 0 \\ 0 & \_\_ \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = \_\_ \quad p_2 = \_\_ \tag{32}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Za neznanko lahko nastavimo stranico a ali pa diagonalo D. Tu bomo izbrali stranico a, doma pa sami poskusite z diagonalo D.

3. Sestavimo n enačb popravko - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Sestavimo $n =$ ___ enačbi popravkov, kjer vsako opazovanje povežemo z neznanko. Dobimo:
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 = \sqrt{2}\, a \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 = \sqrt{2}\, a \end{aligned} \tag{33}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv D_1 + v_1 = \sqrt{2}\, a \\ F_2 &\equiv D_2 + v_2 = \sqrt{2}\, a \end{aligned} \tag{34}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo.
$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = \sqrt{2}\, a - D_1 \\ F_2 &\equiv v_2 = \sqrt{2}\, a - D_2 \end{aligned} \tag{35}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
   Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo 11):
$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 \Rightarrow \min. \tag{36}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami. Uporabimo funkcijo Φ in enačbi 35:
$$\Phi = 4\,(\sqrt{2}\, a - D_1)^2 + 1\,(\sqrt{2}\, a - D_2)^2 \Rightarrow \min. \tag{37}$$

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
   Poiščemo odvod enačbe 37 in ga izenačimo z 0:
$$\Phi'(a) = \frac{d\Phi}{da} = 4 \cdot 2(\sqrt{2}\, a - D_1) \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 2(\sqrt{2}\, a - D_2) \cdot \sqrt{2} = 0 \tag{38}$$
   (Ne pozabite odvajati tudi znotraj oklepaja, od tod $\sqrt{2}$ na koncu obeh izrazov.)

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_1 D_1 + p_2 D_2}{p_1 + p_2} = \_\_\mathrm{m} \tag{39}$$

Tu smo dobili pomemben rezultat, in sicer, če so opazovanja različne natančnosti in medseboj nekorelirana, potem je rešitev pri metodi najmanjših kvadratov vedno utežena sredina. Utežena sredina je prikazana na desni, v oklepajih, drugi ulomek. Prvi ulomek ($1/\sqrt{2}$) predstavlja faktor pretvorbe iz diagonale D v stranico a. Če bi za neznanko namesto stranice a izbrali diagonalo D, tega faktorja ne bi bilo.

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb 35.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = \sqrt{2}\,a - D_1 = \_\_\mathrm{m} \\ F_2 &\equiv v_2 = \sqrt{2}\,a - D_2 = \_\_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{40}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \_\_\mathrm{m} \tag{41}$$

Opazovanji sta različne natančnosti in korelirani

1. Iz podatkov naloge sestavimo vektor opazovanj $\mathbf{l}$ in matriko uteži $\mathbf{P}$ (izračunamo uteži opazovanj). Nastavimo n, n_0 in r.
   Tu postopamo povsem enako, kot v primeru direktne metode, na koncu pa dobimo $n = \_\_$, $n_0 = \_\_$, $r = \_\_$ in:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\mathrm{m} \\ \_\_\mathrm{m} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{bmatrix} \rightarrow p_1 = \_\_ \quad p_2 = \_\_ \quad p_{12} = \_\_ \tag{42}$$

2. Nastavimo $u = n_0$ neznank v funkcionalni model.
   Tudi tu bo neznanka stranica a.

3. Sestavimo n enačb popravko - za vsako opazovanje nastavimo svojo enačbo.
   Nastavimo enaki enačbi kot pri nekoreliranih opazovanjih (enačba 33). Dobimo:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \hat{D}_1 = \sqrt{2}\,a \\ F_2 &\equiv \hat{D}_2 = \sqrt{2}\,a \end{aligned} \tag{43}$$

4. V enačbah popravkov vsa izravnana opazovanja $\hat{l}_i$ nadomestimo z zvezo $\hat{l}_i = l_i + v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
   Glej enačbo 34:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv D_1 + v_1 = \sqrt{2}\,a \\ F_2 &\equiv D_2 + v_2 = \sqrt{2}\,a \end{aligned} \tag{44}$$

5. V vsaki enačbi popravek izpostavimo v odvisnosti od neznank, ki v enačbi nastopajo. Glej enačbo 35:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = \sqrt{2}\,a - D_1 \\ F_2 &\equiv v_2 = \sqrt{2}\,a - D_2 \end{aligned} \tag{45}$$

6. Nastavimo karakteristično funkcijo Φ.
Karakteristična funkcija je enaka kot pri direktni metodi (glej enačbo 25) in koreliranih opazovanjih:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + 2p_{12}v_1v_2 \Rightarrow \text{min.} \tag{46}$$

7. V karakteristični funkciji Φ popravke nadomestimo z neznankami. Uporabimo funkcijo Φ in enačbi 35:

$$\Phi = 4\,(\sqrt{2}\,a - D_1)^2 + 1\,(\sqrt{2}\,a - D_2)^2 + 2(-1)(\sqrt{2}\,a - D_1)(\sqrt{2}\,a - D_2) \Rightarrow \text{min.} \tag{47}$$

8. Iščemo najmanjšo vrednost karakteristične funkcije Φ.
Poiščemo odvod enačbe 47 in ga izenačimo z 0:

$$\begin{aligned} \Phi'(a) = \frac{d\Phi}{da} =& 4 \cdot 2(\sqrt{2}\,a - D_1) \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 2(\sqrt{2}\,a - D_2) \cdot \sqrt{2} - \\ & - 2(\sqrt{2}(\sqrt{2}\,a - D_2) + (\sqrt{2}\,a - D_1)\sqrt{2}) = 0 \end{aligned} \tag{48}$$

(Ne pozabite odvajati tudi znotraj oklepaja, od tod $\sqrt{2}$ na koncu obeh izrazov. Tretji člen odvajajte kot produkt dveh funkcij.)

9. Rešimo sistem u enačb v katerih nastopa u neznank, izračunamo vrednosti neznank.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} D_1 = \_\_\text{m} \tag{49}$$

10. Neznanke uporabimo za izračun popravkov, na osnovi enačb iz enačb 35.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv v_1 = \sqrt{2}\,a - D_1 = \_\_\text{m} \\ F_2 &\equiv v_2 = \sqrt{2}\,a - D_2 = \_\_\text{m} \end{aligned} \tag{50}$$

11. Pridobimo izravnane vrednosti opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$.

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \_\_\text{m} \tag{51}$$